Les ponts de Königsberg

Paul Deguire
Département de mathématiques et statistique
Université de Moncton, Canada

Le problème des ponts de Königsberg

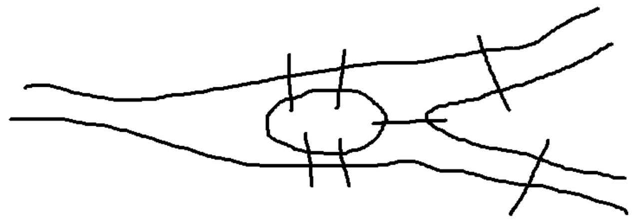
La ville de Königsberg en 1736 était une ville de Prusse orientale traversée par un fleuve sur lequel il y avait une île et qui se divisait en deux branches. La ville était ainsi divisée en quatre régions reliées entre elles par 7 ponts. Le problème que se posaient les habitants de Königsberg était « *Est-il possible de prendre une marche dans la ville qui nous fasse passer par chaque pont exactement une fois chacun*? ». Les gens essayaient différents chemins mais ne parvenaient pas à en trouver un qui les fasse passer exactement une fois sur chaque pont. Puisque de nombreux chemins sont possibles, on peut présumer qu'ils ne perdaient pas espoir de trouver un bon chemin, jusqu'à ce que Leonhard Euler résolve le problème dans un article écrit en 1736.

Leonhard Euler

Leonard Euler était un mathématicien suisse qui après ses études a quitté la Suisse et a travaillé toute sa vie en Russie et en Allemagne, dans les académies de Saint-Pétersbourg et de Berlin. C'était le plus grand mathématicien d'Europe au 18e siècle, tant par la qualité que par la quantité de ses travaux qui portaient sur toutes les questions de mathématiques, pures et appliquées, de l'époque. En fait Euler est un des mathématiciens les plus importants de toute l'histoire des mathématiques.

La solution du problème par Euler

Euler a d'abord simplifié le problème en travaillant avec un schéma de la ville plus simple que le plan habituel qui montrait toutes les rues et tous les bâtiments importants. Le schéma d'Euler ne montre que les quatre régions et les sept ponts les reliant, les seules informations importantes pour résoudre le problème.



Ensuite Euler a représenté chaque région par une lettre (A, B, C et D) ce qui lui permet d'écrire un parcours donné comme une suite de lettres. Chaque pont étant donné par deux lettres, par exemple le pont AB reliant les régions A et B. Puisque dans les régions de passage, on utilise un pont pour arriver et un pont pour repartir mais que ces deux ponts touchent la même région, Euler en décrivant un parcours ne croit pas utile de répéter les lettres, il écrira par exemple le parcours ABC pour décrire un parcours passant par deux ponts, d'abord le pont AB de A à B et ensuite le pont BC de B à C.

Supposons qu'un parcours soit possible passant une fois exactement par chaque pont. Si une région touche *k* ponts et que *k* est pair, deux situations sont possibles : ou bien le parcours commence et termine dans la même région, en quel cas cette région apparaîtra $\frac{k}{2}+1$ fois dans le parcours, sinon elle apparaîtra $\frac{k}{2}$ fois dans le parcours. Lorsque *K* est impair, la région apparaîtra toujours $\frac{k+1}{2}$ fois dans le parcours. On voit bien aussi que pour un problème dans lequel il y a n ponts, le nombre de lettres dans le parcours doit être égal à *n+1* (l'écriture du premier pont demande deux lettres et l'écriture de tous les ponts suivants demande une lettre par pont).

On a maintenant tous les outils pour résoudre le problème des ponts de Königsberg à la manière d'Euler. Le tableau suivant résume la situation, la première ligne identifie les régions, la seconde donne le nombre de ponts touchant chaque région et la dernière donne la fréquence à laquelle chaque région apparaîtra dans le parcours :

régions	**C**	**N**	**S**	**E**
nombre de ponts	**5**	**3**	**3**	**3**
fréquence dans le parcours	**3**	**2**	**2**	**2**

Ainsi, pour qu'un parcours passant exactement une fois sur chaque pont soit possible, on a besoin de 9 lettres pour décrire le parcours (la somme des fréquences) alors qu'un parcours ayant 7 ponts ne requiert que 8 lettres pour être décrit.   Un tel parcours ne peut donc pas exister, il n'était pas possible de prendre une marche dans la ville de Königsberg en 1736 qui nous fasse passer par chaque pont exactement une fois chacun.

En analysant le raisonnement d'Euler et en utilisant les formules donnant les fréquences en fonction du nombre de ponts de chaque région, on voit bien que s'il y a plus que deux régions ayant un nombre impair de ponts (comme dans le cas des ponts de Königsberg), le parcours sera impossible car la somme des fréquences va dépasser la longueur réelle du parcours (le nombre réel de lettres décrivant le parcours).

Les conclusions exactes d'Euler

La solution présentée montre donc clairement qu'une condition nécessaire pour résoudre le problème est que le nombre de régions ayant un degré impair ne dépasse pas deux. *S'il y a plus que deux régions ayant un degré impair, le problème n'a pas de* solutions. En fait la condition est également suffisante, c'est-à-dire que *s'il y a au plus deux régions ayant un degré impair il y a forcément une solution*.

Les conclusions précises d'Euler sont :

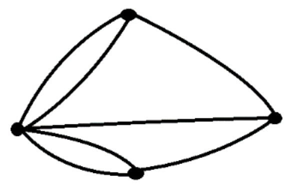
1. S'il y a plus de deux régions où mènent un nombre impair de ponts, alors la marche[1] proposée est impossible. (condition nécessaire).
2. Si le nombre de ponts est impair pour exactement deux régions, la marche proposée est possible et doit commencer dans l'une de ces deux régions (condition suffisante).
3. Si aucune région ne correspond à un nombre impair de ponts, alors la marche est possible et peut débuter n'importe-où. (condition suffisante).

Note : Deux résultats sont implicites dans le travail d'Euler, il ne les mentionne pas dans ses conclusions. D'abord, si deux régions ont un degré impair on doit non seulement débuter par une de ces régions, on doit forcément terminer dans la seconde. Ensuite, il est impossible qu'il y ait une seule région ayant un degré impair car alors le degré total (la somme des degrés de chaque région) serait impair alors qu'en réalité ce degré total est toujours pair, il est égal à deux fois le nombre de ponts.

[1] La marche proposée consiste à parcourir la ville de Königsberg en passant sur tous ses ponts une fois chacun.

Euler a-t-il fait de la théorie des graphes?

L'article d'Euler est considéré par plusieurs comme l'article fondateur de la théorie des graphes. Un graphe est un ensemble de sommets reliés par des lignes qu'on appelle arcs. On peut tracer un graphe qui est équivalent au schéma d'Euler, il aura quatre sommets (représentant les régions) et sept lignes (représentant les ponts).



Euler n'a pas tracé de graphes, il n'a pas parlé de sommets ou d'arcs ni de degré d'un sommet. Dans sa résolution du problème Euler ne trace que le schéma de la ville et ensuite il réfléchit sur ce schéma exactement comme si c'était un graphe formé de sommets et d'arcs. Il n'utilise pas ce langage cependant, il parle de régions et de ponts. Sur le schéma, les différentes régions sont vastes et les différents ponts qui touchent à une région le font en des endroits différents. Dans son raisonnement Euler fait abstraction de l'étendue de ces régions et des endroits divers où les ponts touchent une région. Exactement comme s'il utilisait des sommets et des arcs. Si on suit le raisonnement moderne fait sur un graphe en prenant soin de dire région au lieu de sommet et de dire arc au lieu de pont, on refait un raisonnement semblable à celui qu'Euler a fait. S'il n'a pas défini explicitement les notions de graphes, de sommets et d'arc, ces notions sont implicites dans le travail d'Euler lorsqu'il généralise sa solution du problème des ponts de Königsberg.

Sans parler de théorie des graphes, Euler était tout de même conscient que son travail reposait sur des idées nouvelles. Il a affirmé que son article portait sur la géométrie de position, une nouvelle discipline mathématique mentionnée brièvement par Leibniz au siècle précédent mais largement inconnue. L'article d'Euler a été le premier qui portait spécifiquement sur cette nouvelle discipline qui allait engendrer au 19^{e} siècle non seulement la théorie des graphes, mais également l'analyse de position qui a mené à la topologie, un sujet mathématique qui a connu un développement considérable au 20^{e} siècle.

La solution moderne (présentée dans la vidéo)

La solution moderne utilise un graphe dont les sommets représentent les régions et dont les arcs représentent les ponts. Un tel graphe, représentant la ville de Königsberg est illustré plus haut. Il suffit, comme Euler a fait de calculer le nombre de ponts touchant chaque région. On divise alors les régions en deux catégories : les régions de passage et les régions extrémales. Les régions extrémales sont celles où débute et où termine le parcours. Il y en aura au plus deux. Les régions de passages sont toutes les autres régions et puisqu'à chaque passage dans une région de passage on utilise deux ponts, un pour y arriver, un autre pour la quitter, ces régions toucheront toutes un nombre pairs de ponts. Donc, outre au plus deux régions extrémales, toutes les régions doivent toucher un nombre pair de ponts. Dans le cas du problème de Königsberg, quatre régions touchent un nombre impair de ponts, le parcours est donc impossible

En conclusion

Trois observations sur le travail d'Euler nous permettent à la fois de bien comprendre l'importance de cet article de 1736 et d'expliquer aux non-mathématiciens en quoi consiste le travail d'un mathématicien.

1. Le schéma simplifié de la ville de Königsberg est un modèle qui simplifie un problème et permet de trouver une solution mathématique. La modélisation est au cœur de toutes les recherches en mathématiques appliquées, c'est-à-dire dans les mathématiques qui traitent de problèmes concrets.
2. En utilisant pour la première fois de manière explicite la géométrie de la position, Euler fait ce que les grands mathématiciens font, il met de l'avant une théorie nouvelle pour résoudre un problème que les théories existantes n'ont pas réussi à résoudre. Ce faisant il jette les bases de la théorie des graphes et de la topologie.
3. Dans la solution proposée par Euler, on ne voit pas beaucoup de calcul, de nombres ou d'équations. Euler montre ainsi que les mathématiques sont bien davantage qu'un domaine consacré aux nombres et aux opérations arithmétiques sur les nombres. Le mathématicien s'intéresse aux objets mathématiques, par exemple les graphes, leurs sommets et leurs arcs, ainsi qu'aux relations entre ces objets. Par raisonnement plutôt que par calcul, il tire des conclusions qui l'aident à résoudre des problèmes.

Annexe (un peu difficile)

Dans la vidéo, on montre clairement qu'avoir au plus deux régions ayant un degré impair est une condition nécessaire pour qu'il y ait une solution au problème. La condition doit être satisfaite pour qu'il y ait solution au problème. Euler a aussi affirmé, sans le montrer complètement, que c'est une condition suffisante. Cette condition assure qu'il y a effectivement une solution au problème. La preuve de la suffisance est plus complexe que la preuve de la nécessité. En voici les grandes lignes, avec le langage de la théorie des graphes pour simplifier.

Le problème à résoudre : trouver dans un graphe donné dont au plus deux sommets ont un degré impair, un parcours qui utilise chaque arc une fois chacun. On suppose que le graphe est connexe, c'est-à-dire qu'il ne se décompose pas en sous-graphes disjoints. Il est d'un seul morceau.

1. Il suffit de résoudre le problème dans le cas où tous les sommets ont un degré pair, *car si deux sommets ont un degré impair on peut les relier par un nouvel arc pour obtenir un graphe avec tous les sommets pairs donnant une solution au problème.*
2. Un circuit est un parcours dans lequel chaque sommet a degré 2. Un graphe représenté par un polygone (dont les côtés sont les arcs) est un circuit.
3. Un parcours est maximal si il contient le plus d'arcs possibles. Pour résoudre le problème il faut trouver un parcours qui contienne tous les arcs.
4. Si tous les sommets sont de degré pair, alors il y a toujours un circuit. *En effet, on voit bien que si l'on part d'un sommet donné et qu'on fabrique une suite d'arcs ne passant jamais par le même sommet deux fois, on peut procéder jusqu'au moment jusqu'au moment où il est impossible de continuer et de trouver un nouvel arc non atteint. Lorsqu'on ne peut plus continuer, il suffit d'utiliser un des arcs du sommet final (son degré est pair, il a d'autres arcs que celui par lequel on arrive) et cet arc conduira forcément à un des sommets par lequel passe notre suite d'arcs (autrement on pourrait continuer). Si on ne garde de la suite d'arc que la partie commençant et terminant avec ce sommet, on a bien un circuit*.
5. Supposons qu'un parcours maximal existe qui ne contient pas tous les arcs du graphe (hypothèse de contradiction). En retranchant tous les arcs de ce parcours du graphe initial on obtient un nouveau graphe dont tous les sommets ont un degré pair. Ce nouveau graphe contient des arcs car le parcours maximal ne les contenait pas tous, il a donc un circuit. Le graphe étant connexe, on peut joindre bout à bout le parcours maximal et le circuit pour obtenir un nouveau parcours ayant plus d'arcs que le parcours maximal, ce qui est une contradiction. Donc tout parcours maximal doit contenir tous les arcs et ainsi fournir une solution au problème.