Les origines de la théorie des probabilités

Paul Deguire
Département de mathématiques et statistique
Université de Moncton, Canada

L'histoire ancienne

La notion de probabilité, dans sa forme la plus simple, remonte à l'origine des jeux de hasard. On joue aux dés depuis des milliers d'années. Les cartes à jouer étaient déjà anciennes en Asie et au Moyen Orient lorsqu'elles apparurent en Europe au 14^{e} siècle. De nombreux jeux, plus ou moins complexes, utilisent les cartes ou les dés et établir des stratégies pour ces jeux exigeait de se questionner sur les chances de chacun de gagner, ou sur la probabilité de certains événements. Mais la notion de probabilité restait aussi rudimentaire au début, il suffisait de savoir quelles sont les chances de tirer un double six ou encore de piger une carte de pique.

L'Italie de la Renaissance

Trois mathématiciens italiens de la renaissance, Luca Pacioli, Niccolo Fontana, mieux connu sous le nom de Tartaglia, et Girolamo Cardano ont chacun apporté une contribution aux questions de probabilité. Plusieurs jeux de hasard pur demandaient de gagner plusieurs parties pour être victorieux. Par exemple on peut supposer que pour empocher une mise il faut être le premier joueur à réaliser 10 gains. Si la partie est interrompue après huit jeux et que le joueur A en a gagné 5 contre 3 pour le joueur B, on se demande comment la mise doit être partagée. Il est clair que donner toute la mise au joueur A sous prétexte qu'il mène n'a pas beaucoup de sens, B a encore de bonnes chances de gagner.

Luca le premier a proposé une solution simple : il faut partager la mise au prorata des gains effectués au moment où on interrompt la partie. Dans le cas qui nous intéresse, le joueur A recevrait $\frac{5}{8}$ de la mise contre $\frac{3}{8}$ de la mise pour B. Ça semble raisonnable à première vue. Mais on s'est vite rendu compte que ce n'était pas vraiment raisonnable. Par exemple, si A avait un gain contre 0 pour B au moment de l'interruption il devait recevoir toute la mise alors qu'il n'a qu'un gain sur les dix requis et donc à peine plus de chances que B de l'emporter. C'est Tartaglia qui a fait cette remarque mais il n'a pas proposé de nouvelle solution, se contentant de dire que la solution de Pacioli n'était pas correcte. Cardano a proposé une nouvelle solution, il faut partager la mise non pas au prorata des gains faits mais au prorata inverse des gains qui restent à faire. Dans le premier cas, il manque 5 gains à A et il en manque 7 à B, donc A recevrait $\frac{7}{12}$ de la mise contre $\frac{5}{12}$ pour B. Dans le second exemple, il manque 9 gains à A et il en manque 10 à B, A recevrait $\frac{10}{19}$ de la mise contre $\frac{9}{19}$ pour B. Cette solution paraît raisonnable dans les deux cas.

Mais ces réflexions demeuraient empiriques et malgré le fait que Cardano ait écrit un livre sur les jeux de hasard, les historiens s'entendent à dire que la théorie des probabilités a réellement pris naissance au siècle suivant en France.

Les problèmes du chevalier de Méré

Antoine Gombaud, chevalier de Méré était un homme du monde, jouant à certains jeux de hasard et fréquentant les salons de la haute noblesse parisienne. Il proposa à Blaise Pascal le problème des points suivants : supposons qu'une partie est en cours, qu'il faille remporter quatre jeux pour gagner et que la partie soit interrompue lorsque le joueur A a remporté 2 jeux contre 1 pour le joueur B. Pascal a partagé ce problème avec Pierre de Fermat et ils en ont tous deux trouvé une solution satisfaisante. Une discussion sur les probabilités s'ensuivit entre les deux hommes et c'est à Christian Huygens qui de son propre aveu devait tout à Pascal et Fermat que revient l'honneur d'écrire le premier livre sur la théorie des probabilités en 1657 : « *De ratiociniis in ludo aleae* » (raisonnements sur les jeux de dés).

La solution du problème par Pascal

La solution de Pascal utilise son triangle arithmétique.

ligne 0							**1**						
ligne 1						**1**		**1**					
ligne 2					**1**		**2**		**1**				
ligne 3				**1**		**3**		**3**		**1**			
ligne 4			**1**		**4**		**6**		**4**		**1**		
ligne 5		**1**		**5**		**10**		**10**		**5**		**1**	
ligne 6	**1**		**6**		**15**		**20**		**15**		**6**		**1**

On observe que dans les diagonales extérieures de part et d'autres du triangle, il n'y a que des 1 et que chaque terme intérieur au triangle est obtenu en additionnant les deux termes au-dessus de lui, à sa droite et à sa gauche (par exemple le premier 10 de la ligne 5 est égal à 4 + 6). En fait si C_r^n représente le nombre de manière de

choisir r objets parmi n (*la combinaison de r objets parmi n*) on constate que la r^e entrée sur la n^e ligne (n et r ≥ 0) est précisément C_r^n. Prenons par exemple le 6 à la position r = 2 sur la ligne n = 4. Si on a quatre objets A, B, C et D, il y a affectivement 6 façons d'en choisir 2 : AB, AC, AD, BC, BD et CD.
On a bien que $C_2^4 = 6$. Le triangle arithmétique peut donc être réécrit comme suit :

ligne 0							C_0^0						
ligne 1						C_0^1		C_1^1					
ligne 2					C_0^2		C_1^2		C_2^2				
ligne 3				C_0^3		C_1^3		C_2^3		C_3^3			
ligne 4			C_0^4		C_1^4		C_2^4		C_3^4		C_4^4		
ligne 5		C_0^5		C_1^5		C_2^5		C_3^5		C_4^5		C_5^5	
ligne 6	C_0^6		C_1^6		C_2^6		C_3^6		C_4^6		C_5^6		C_6^6

Pascal s'intéresse au nombre de parties non jouées sur un total possible de 7 (si la partie dure le plus longtemps possible elle finira sur un score de 4 contre 3), Puisqu'il y a déjà trois parties de jouées (deux gains de A, un gain de B) il en reste au maximum 4. Pascal va faire comme si toutes ces parties étaient jouées et compiler tous les gains de A et de B pour pouvoir décider dans chaque cas qui remporte la mise

Dans son triangle il s'intéresse à la ligne 4 (n = 4). L'entrée C_r^4 représentant le nombre de façons que A gagne r parties.

r = 0 : $C_0^4 = 1$ car la seule façon de jouer quatre parties sans gains de A est que B les gagne les quatre

r = 1 : $C_1^4 = 4$, A gagne une partie parmi quatre (La 1ere, la 2^e, la 3^e ou la 4^e).

r = 2 : $C_2^4 = 6$, A gagne deux parties parmi quatre

r = 3 : $C_3^4 = 4$, A gagne trois parties parmi quatre

r = 4 : $C_4^4 = 1$, A gagne toutes les parties.

Il est clair que A gagne lorsque $r \geq 2$ (en tout 6+ 4 + 1 = 11 façons) et que B gagne lorsque $r \leq 1$, (en tout 1 + 4 = 5 façons). La mise doit donc être partagée comme suit : $\frac{11}{16}$ de la mise pour A et $\frac{5}{16}$ de la mise pour B.

La solution du problème par Fermat

La solution de Fermat est plus directe. Elle n'utilise pas d'outils sophistiqués comme les combinaisons où le triangle arithmétique mais elle dit essentiellement la même chose que la solution de Pascal. Fermat aussi se dit qu'il reste au maximum quatre parties à jouer et il écrit toutes les façons que ces quatre parties peuvent être jouées notant au passage qui gagne, A ou B.

Ainsi, si A gagne les quatre parties : AAAA	1 façon
Si A gagne 3 parties : AAAB, AABA, ABAA et BAAA	4 façons
Si A gagne 2 parties : AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA	6 façons
Si A gagne 1 partie : ABBB, BABB, BBAB, BBBA	4 façons
Si A gagne 0 parties : BBBB	1 façon

Donc, sachant que A gagne s'il gagne au moins deux des quatre parties (car il a déjà deux gains et il lui en faut quatre au total),

A sera vainqueur dans 1 + 4 + 6 = 11 cas.

Alors que B sera vainqueur si A gagne au plus une partie (et donc B au moins trois), c'est-à-dire dans 4 + 1 = 5 cas.

Encore une fois le partage de la mise est $\frac{11}{16}$ de la mise pour A et $\frac{5}{16}$ pour B.

Notes de conclusion

1. Ce problème est le premier de la correspondance entre Pascal et Fermat qui conduisit Huygens à écrire soin livre sur les probabilités. On peut donc dire que ce problème des points du chevalier de Méré est à l'origine de la théorie des probabilités.
2. On observe qu'avec la formule de Pacioli, A aurait eu $\frac{2}{3}$ de la mise. Avec celle de Cardan il aurait eu $\frac{3}{5}$ de la mise, deux solutions incorrectes.
3. On peut avoir l'impression à première vue qu'en jouant les quatre parties manquantes au complet, Fermat et Pascal examinent trop de situations et que la vraie solution leur échappe. Mais en fait, la théorie moderne des probabilités corrobore les deux solutions, elles sont bien correctes.

Arbre de probabilité moderne

Voici toutes les situations possibles en s’arrêtant chaque fois qu’un joueur a gagné quatre jeux.

Partie 1 probabilité $\frac{1}{2}$	Partie 2 probabilité $\frac{1}{4}$	Partie 3 probabilité $\frac{1}{8}$	Partie 4 probabilité $\frac{1}{16}$
vainqueur	**vainqueur**	**vainqueur**	**vainqueur**
A	**gain de A**		
A	B	**gain de A**	
A	B	B	**gain de A**
A	B	B	**gain de B**
B	A	**gain de A**	
B	A	B	**gain de A**
B	A	B	**gain de B**
B	B	A	**gain de A**
B	B	A	**gain de B**
B	B	**gain de B**	
Total A :	$\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}=\frac{11}{16}$		
Total B	$\frac{1}{8}+\frac{3}{16}=\frac{5}{16}$		

Errata

Peu avant le milieu de la vidéo, quand nous présentons la méthode suggérée par Cardano, nous disons à deux reprises que ça répond correctement à la question posée par Pacioli. Il aurait fallu dire que ça répond correctement à la question posée par Tartaglia. Comme vous aurez bien compris, la question porte sur la méthode de Pacioli, mais elle a été posée par Tartaglia.