Comparaisons multiples

- savoir appliquer les différents tests de comparaisons multiples
- comprendre les principes de ces procédures
- Comprendre pourquoi il faut des procédures spéciales pour faire des comparaisons multiples
  - quel danger y-a-t-il à faire des comparaisons multiples
  - comment s'en sortir

Deux autres notions à propos des comparaisons multiples

- Comparaisons prévues:
  a priori
- ou non
  a posteori
  + nombreuses

- Comparaisons directes de paires de moyennes
  comme le test t
- ou par combinaison linéaire de toutes les moyennes

$$L = a_1\bar{X}_1 + a_2\bar{X}_2 + \ldots + a_j\bar{X}_j + a_k\bar{X}_k =$$

$$L = \sum\left(a_k\bar{X}_k\right)$$

Procédure de comparaisons multiples a priori: le test t

- le test t standard

$$t_{(dl)} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$dl = n_1 + n_2 - 2$$

- le test t adapté à l'ANOVA

$$t_{(dl)} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{2CM_{erreur}}{n}}}$$

dl = dl associé à CM_{erreur}

Particularité des combinaisons linéaires

- Leur nombre = ou < $dl_{traitement}$
- Il faut savoir choisir les coefficients a_j
- 2 avantages
  - peuvent se calculer directement sous forme de SC

$$SC_{contraste} = \frac{nL^2}{\sum a_j^2}$$

  - peuvent être formulés de façon orthogonale

$$\sum a_j = 0$$
$$\sum a_j b_j = 0$$

seulement dans ce cas $SC_{traitement} = \sum SC_{contraste}$

Procédure de comparaisons multiples a priori: les combinaisons linéaires

- Définition d'une combinaison linéaire

$$L = a_1\bar{X}_1 + a_2\bar{X}_2 + \ldots + a_j\bar{X}_j + a_k\bar{X}_k =$$
$$L = \sum\left(a_k\bar{X}_k\right)$$
$$\sum a_k = 0$$
$$SC_{contraste} = \frac{nL^2}{\sum a_k^2}$$

- Chaque contraste peut être testé

$$F_{(1, dl_{erreur})} = \frac{SC_{contraste}/1}{CM_{erreur}} = \frac{CM_{contraste}}{CM_{erreur}} = \frac{nL^2 / \sum a_j^2}{CM_{erreur}} = \frac{nL^2}{\sum a_j^2 (CM_{erreur})}$$

	Addition	Rimes	Adjectifs	Images	Intentionel
	9	7	11	12	10
	8	9	13	11	19
	6	6	8	16	14
	8	6	6	11	5
	10	6	14	9	10
	4	11	11	23	11
	6	6	13	12	14
	5	3	13	10	15
	7	8	10	19	11
	7	7	11	11	11
Σ	70	69	110	134	120
M	7.00	6.90	11.00	13.40	12.00
DS	1.83	2.13	2.49	4.50	3.74

Comparaisons multiples a priori: exemple de calculs (1)

Gr. :	1. Addition	2. Rimes	3. Adjectifs	4. Images	5. Intentionel
Moy	7.00	6.90	11.00	13.40	12.00
ÉT	1.83	2.13	2.49	4.50	3.74

H1: Intentionnel meilleur rappel que tous les autres groupes
H2: Tous les autres groupes sont semblables $\sum a_k^2$
L1:
L2.1:
L2.2:
L2.3:

Comparaisons multiples a priori: exemple de calculs (2)

Gr. :	1. Addition	2. Rimes	3. Adjectifs	4. Images	5. Intentionel
Moy	7.00	6.90	11.00	13.40	12.00

L1:
L2.1:
L2.2:
L2.3:

L1 =
L2.1 =
L2.2 =
L2.3 =

Comparaisons multiples a priori: exemples de calculs (3)

Gr. :	1. Addition	2. Rimes	3. Adjectifs	4. Images	5. Intentionel
Moy	7.00	6.90	11.00	13.40	12.00
ÉT	1.83	2.13	2.49	4.50	3.74

$$\mathbf{SC}_{\text{contraste}} = \frac{nL^2}{\sum a_j^2}$$

L1 =
L2.1 =
L2.2 =
L2.3 =

Comparaisons multiples a priori: exemple de calculs (3)

Gr. :	1. Addition	2. Rimes	3. Adjectifs	4. Images	5. Intentionel
Moy	7.00	6.90	11.00	13.40	12.00
ÉT	1.83	2.13	2.49	4.50	3.74

$$F_{(1, dl_{erreur})} = \frac{SC_{contraste}/1}{CM_{erreur}} = \frac{CM_{contraste}}{CM_{erreur}} =$$

voir p. 313

L1 =
L2.1 =
L2.2 =
L2.3 =

Le tableau d'analyse de variance

Source de variation	SC	dl	CM	F	p
Traitement	351,52	4	87,88	9,08	< ,05
Contraste 1	47,04	1	47,04	4,86	< ,05
Contraste 2	275,62	1	275,62	28,49	< ,05
Contraste 3	28,80	1	28,80	2,98	> ,05
Contraste 4	0,05	1	0,05	0,005	> ,05
erreur	435,30	45	9,67		
Total	786,82	49			

Un exemple de calcul apriori

I. Lettré, une chercheure de réputation internationale, présente des mots simples de type CVC (ex.: bol) en lettrage conventionnel ou en italique en des temps d'exposition courts et très courts. Elle enregistre le nombre d'erreurs d'identification de mots faites par 20 participants et participantes

Un exemple de calcul apriori

Supposons qu'I. Lettré avait formulé préalablement à son expérimentation 3 hypothèses: il y aura plus d'erreurs

Le tableau d'analyse de variance

Source de variation	SC	dl	CM	F	p
Type de lettrage	5	1	5.0	2.00	>.05
Temps d'exposition	45	1	45.0	18.00	<.05
Type de lettrage x Temps d'exposition	125	1	125.0	50.00	<.05
Erreur	40	16	2.5		
Total	215	19			

	Lettrage normal (A1)		Lettrage Italique (A2)	
	90 mec (B1)	45 msec (B2)	90 msec (B1)	45 msec (B2)
	7	5	3	11
	8	6	4	12
	9	7	5	13
	10	8	6	14
	11	9	7	15
	45	35	25	65
M	9	7	5	13

Combinaisons a priori (1)

$$SC_{contraste} = \frac{nL^2}{\sum a_j^2}$$

$$SC_{contraste} L_1 = \frac{nL^2}{\sum a_j^2} =$$

$$SC_{contraste} L_2 = \frac{nL^2}{\sum a_j^2} =$$

Combinaisons a priori (2)

$$SC_{contraste} = \frac{nL^2}{\sum a_j^2}$$

Source de variation	SC	dl	CM	F	p
Traitement	175	3			
Contraste 1		1			
Contraste 2		1			
Contraste 3		1			
Erreur	40	16	2.5		
Total	215	19			

Procédures de comparaisons multiples a posteriori (1)

- **LSD: la plus petite différence significative**
  - suppose l'hypothèse nulle
  - tests t
- **Test de Scheffé**
  - test selon combinaison linéaire
  - mais ajuste 2 fois la valeur critique de F par k-1 c'est-à-dire $(k-1)F(k-1, dl_{ERREUR})$

Procédures de comparaisons multiples a posteriori (2): procédures basées sur la loi de Student

- **Statistique de Student**

$$q_r = \frac{\bar{X}_g - \bar{X}_p}{\sqrt{\frac{CM_{erreur}}{n}}}$$ avec r et $dl_{(erreur)}$ comme dl

- **Test de Newman-Keuls**
  - mise en ordre des moyennes selon leur taille
  - comparaison de toutes les paires de moyennes en ajustant la distance entre celles-ci

Comparaisons multiples a posteori: exemple de calculs (1)

Gr. :	1. Addition	2. Rimes	3. Adjectifs	4. Images	5. Intentionel
Moy	7.00	6.90	11.00	13.40	12.00
ÉT	1.83	2.13	2.49	4.50	3.74

a) Réordonner les moyennes

Gr. :	2. Rimes	1. Addition	3. Adjectifs	5. Intentionel	4. Images
Moy	6.90	7.00	11.00	12.00	13.40
ÉT	2.13	1.83	2.49	3.74	4.50

Comparaisons multiples a posteori: exemple de calculs (2)

b) Faire les calculs

Gr. :	2. Rimes	1. Addition	3. Adjectifs	5. Intentionel	4. Images
Moy	6.90	7.00	11.00	12.00	13.40

$$q_r = \frac{\bar{X}_g - \bar{X}_p}{\sqrt{\frac{CM_{erreur}}{n}}} =$$

Comparaisons multiples a posteori: exemple de calculs (2b)

b) Faire les calculs

Gr. :	2. Rimes	1. Addition	3. Adjectifs	5. Intentionel	4. Images
Moy	6.90	7.00	11.00	12.00	13.40

$$q_r = \frac{\bar{X}_g - \bar{X}_p}{\sqrt{\frac{CM_{erreur}}{n}}} =$$

Comparaisons multiples a posteori: exemple de calculs (2a)

$$q_r = \frac{\bar{X}_g - \bar{X}_p}{\sqrt{\frac{CM_{erreur}}{n}}}$$

Gr. :	2. Rimes	1. Addition	3. Adjectifs	5. Intentionel	4. Images	Valeur critère de q
Moy	6.90	7.00	11.00	12.00	13.40	
2 Rim						
1 Add						
3 Adj						
5 Int						

Comparaisons multiples a posteori: exemple de calculs (2)

Gr. :	2. Rimes	1. Addition	3. Adjectifs	5. Intentionel	4. Images	Différence critique $\bar{X}_g - \bar{X}_p = q_r \sqrt{\frac{CM_{erreur}}{n}}$	q
Moy	6.90	7.00	11.00	12.00	13.40		
2 Rim							
1 Add							
3 Adj							
5 Int							

Écart studentisé: exemple de calcul (a)

$$q_r = \frac{\bar{X}_g - \bar{X}_p}{\sqrt{\frac{CM_{erreur}}{n}}}$$

avec r et $dl_{(erreur)}$ comme dl

Gr. :	Ital. 90	Norm. 45	Norm. 90	Ital. 45	q
Moy	5	7	9	13	
Ital. 90	----				
Norm. 45	---	---			
Norm. 90	---	---	---		

Procédures de comparaisons multiples a posteriori (3): procédures basées sur la loi de Student

- HSD: Test de la différence franchement significative de Tukey
  - ibid. à Newman-Keuls
  - mais n'utlise qu'une seule valeur critique, la plus grande
- Procédure de Ryan (REGWQ)

$$\alpha_{comparaison} = \frac{r\alpha}{k} \qquad \alpha_{comparaison} = 1-(1-\alpha)^{r/k}$$

Procédures de comparaisons multiples a posteriori (4)

- Comparaisons à un groupe témoin: le test de Dunnett

$$t_{d\,(k,\ dl)} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{2\ CM_{erreur}}{n}}}$$

Voir table de t_d

dl = dl associé à CM_{erreur}

Comparaison des procédures

SECTION 12.11 QUEL TEST CHOISIR ? 431

Test	Taux d'erreur*	Comparaison	Type	A priori/ A posteriori
1. Tests *t* multiples	*EC*	Par paires	*t*	A priori
2. Contrastes linéaires	*EC*	Tous contrastes	*F*	A priori
3. *t* de Bonferroni	*PE* ou *EE*	Tous contrastes	*t*[‡]	A priori
4. Holm ; Larzelere et Mulaik	*EE*	Tous contrastes	*t*[‡]	A priori
5. LSD de Fisher	*EE*[†]	Par paires	*t*	A posteriori
6. Newman–Keuls	*EE*[†]	Par paires	Écarts	A posteriori
7. Ryan (REGWQ)	*EE*	Par paires	Écarts	Post hoc
8. Tukey (HSD)	*EE*	Par paires	Écarts[§]	A posteriori
9. Test de Scheffé	*EE*	Tous contrastes	*F*[‡]	A posteriori
10. Test de Dunnett	*EE*	Groupe témoin	*t*[‡]	A posteriori

[*] *EC* = par comparaison ; *PE* = par expérience ; *EE* = de l'ensemble
[†] Par rapport à l'hypothèse nulle complète
[‡] Modifiée
[§] Le test HSD de Tukey peut être utilisé pour tous les contrastes, mais les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants.

	W_2	W_3	W_4	W_5
Tests *t* multiples	5.74	5.74	5.74	5.74
Test *t* de Bonferroni[†]	7.47	7.47	7.47	7.47
Holm[*]	5.74	6.64	7.13	7.47
Newman–Keuls	5.74	6.92	7.63	8.13
Ryan (REGWQ)	6.88	7.54	7.63	8.13
Tukey (HSD)	8.13	8.13	8.13	8.13
Test de Scheffé	9.21	9.21	9.21	9.21

[†] En supposant que quatre contrastes par paires seulement soient souhaités
[*] En supposant que les différences soient significatives à tous les niveaux précédents

Un F significatif est équivoque

- Il y a autant de comparaisons à faire que

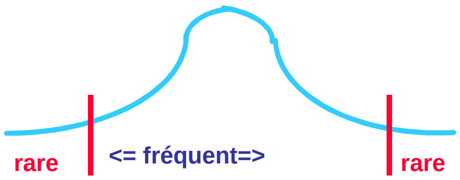
$$C_r^N = \frac{N!}{r!(N-r)!}$$

- Tester ces comparaisons fait augmenter la probabilité de commettre une erreur sur l'ensemble des comparaisons
  le seuil de .05 équivaut à 1/20,
  mais ne vaut que pour 1 comparaison

Rappel de notions du chapitre 4

Que font les tests d'inférence statistique? (1)

- **paramétrique**
  le paramètre est-il fréquent ou rare selon la distribution théorique?



Les erreurs d'inférence

Décision du chercheur ou de la chercheure

État de la nature

	H_0 vraie $\mu_1 = \mu_2$	H_0 fausse $\mu_1 \neq \mu_2$
Accepte H_0 $\underline{M}_1 = \underline{M}_2$	o.k.	erreur de type II erreur β
Rejette H_0 $\underline{M}_1 \neq \underline{M}_2$	erreur de type I erreur α	o.k.

puissance statistique

La probabilité de faire l'erreur de type I peut s'interpréter comme le nombre de conclusions erronées produites par 100 répétitions de la même expérience.

*Les décisions prises à partir de tests d'inférence sont des **décisions basées sur des probabilités***

Probabilité de faire une erreur de type I;

en recherche, les conclusions sont incertaines

Fin du rappel

Problème des comparaisons multiples

- **Chaque comparaison a son taux d'erreur (EC)**
- **Sur l'ensemble des comparaisons (EE), le taux d'erreur augmente:**

$$\alpha_{EE} = 1 - (1 - \alpha_{EC})^{c}$$

- **Cette évolution est plus lente que la simple addition des taux d'erreur (Loi d'inégalité de Bonferroni)**

$$\alpha_{EE} = 1 - (1 - \alpha_{EC})^{c} \leq c\,\alpha_{EC}$$

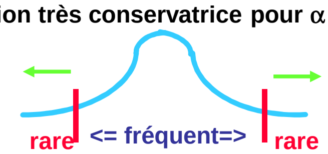
La solution de Bonferroni au problème des comparaisons multiples

- Il suffit de diviser le taux d'erreur choisi pour l'ensemble par le nombre de comparaisons et donc d'adopter ce taux (divisé) pour chaque comparaison

$$\alpha_{EC} = \frac{\alpha_{EE}}{C}$$

La solution de Bonferroni au problème des comparaisons multiples

- Solution très conservatrice pour α



- qui réduit la puissance statistique celle-ci dépend
  - taille de l'échantillon (n)
  - taille de l'effet
  - α

Procédures de comparaisons multiples a priori: les procédures réduisant EE (1)

- Les test t et F sur les contrastes ne protègent pas contre l'élévation de l'erreur de type I
- Dunn-Bonferroni suggèrent une procédure pour obtenir cette protection

t'

Procédures de comparaisons multiples a priori: les procédures réduisant EE (2)

- **Des solutions à la procédure de Dunn-Bonferroni jugée trop conservatrice**

Sidak	$\alpha' = 1-(1-\alpha)^{1/c}$
Holm Lazarlee & Mulaik	ajuster progressivement $\frac{\alpha}{C}$ selon l'ordre de grandeur des différences
Shaffer	ibid. mais exclut les résultats illogiques

EXTRA

Exemple d'effet simple

A_1B_1 9	A_1B_2 7	A_2B_1 5	A_2B_2 13	Σa^2	$\Sigma a\underline{X}$	$(\Sigma a\underline{X})^2$	$n(\Sigma a\underline{X})^2$

Le tableau d'analyse de variance

Source de variation	SC	dl	CM	F	p
Type de lettrage	5	1	5.0	2.00	>.05
Effet simple du T_exp. au niveau du lettrage normal					
Effet simple du T_exp. au niveau du lettrage en ital.					
Erreur	40	16	2.5		
Total	215	19			