Chapitre 5

L'absorption, l'émission stimulée et l'émission spontanée

Objectifs spécifiques du chapitre 5:

1) *Pouvoir calculer la densité de modes du champ électromagnétique dans le vide par unité de volume et de fréquence,* $\rho = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$ *; savoir convertir cette formule pour la donner par unité de bande passante en longueur d'onde ou en nombre d'onde;*
2) *comprendre la signification physique des termes* $\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$, $h\nu$ *et* $\frac{1}{\exp\left(h\nu / k_B T\right) - 1}$ *contenus dans la loi de Planck;*
3) *pouvoir définir l'absorption, l'émission spontanée et l'émission stimulée et pouvoir expliquer ce qui les différencie;*
4) *pouvoir énoncer le principe de bilan détaillé dans le contexte du rayonnement d'un corps noir;*
5) *pouvoir retracer toutes les étapes logiques de calcul qui mènent à l'équation (15);*
6) *démontrer que les coefficients d'Einstein* B_{12} *et* B_{21} *sont égaux (équation 16);*
7) *établir la relation qui relie les coefficients d'Einstein* B *à* A *(équation 17);*
8) *comprendre la signification physique de la fonction ''forme de raie'',* $g(\nu)$;
9) *savoir différencier les formules donnant les taux d'absorption et d'émission (stimulée ou spontanée) utilisées lors de l'interaction d'une transition avec un spectre électromagnétique large (éqs. 7-9) ou étroit (éqs. 20, 24, 25);*
10) *identifier les paramètres pertinents pour calculer le rapport entre les taux d'émission stimulée et spontanée pour la transition impliquée dans l'effet laser et pouvoir mener à terme ce calcul.*

Nous allons dans les cinq prochains chapitres aborder les matériaux luminescents. Un matériau luminescent contient des atomes, ions ou des molécules pouvant émettre des photons lorsqu'ils se désexcitent depuis un état excité. Si un tel matériau est placé hors de l'équilibre thermodynamique au moyen d'un processus de pompage permettant de placer un certain nombre d'atomes ou de molécules dans un état excité, ce matériau peut amplifier la lumière dans une certaine gamme de longueurs d'onde; on parle alors de milieu amplificateur ou encore de milieu actif. De plus, si ce matériau est placé à l'intérieur d'un résonateur, les pertes du résonateur pourront éventuellement être compensées par l'amplification dans le milieu actif et l'oscillation laser pourra ainsi se produire.

Nous mettons de côté les résonateurs et considérons le matériau luminescent séparément. Avant d'aborder les propriétés d'un milieu actif lorsqu'il est dans un état excité, il convient d'abord d'étudier les propriétés d'absorption et d'émission de lumière à l'équilibre thermodynamique. Dans ce chapitre, nous allons rappeler les hypothèses qui permettent d'établir la loi de Planck; cette loi décrit le spectre d'émission d'un corps noir à une température donnée. Nous allons ensuite donner l'interprétation qu'Einstein a faite de la loi de Planck en utilisant le principe de bilan détaillé. En plus de pouvoir prédire l'existence de l'émission stimulée, nous verrons que l'approche d'Einstein permet de quantifier de manière très précise les taux relatifs d'absorption, d'émission stimulée et d'émission spontanée.

5.1. La loi de Planck

Bien avant les premiers développements de la physique moderne, les cuiseurs de céramique avaient remarqué qu'un corps chauffé émettait de la lumière, qu'on appelle le rayonnement thermique. Ensuite, les physiciens et chimistes ont remarqué que le spectre d'émission d'un corps chauffé était à peu près le même quelle que soit la nature du matériau examiné. Le caractère universel du rayonnement thermique a attiré l'attention des physiciens; ceux-ci ont, pendant plusieurs décennies, tenté d'expliquer le comportement de l'émission d'un corps noir en fonction de la longueur d'onde et de la température. En se limitant aux concepts de la physique classique existant à la fin du dix-neuvième siècle, on arrivait à une équation connue sous le nom de loi de Rayleigh-Jeans:

$$u_{Rayleigh\text{-}Jeans} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \quad , \tag{1}$$

où u est l'énergie dans un corps noir par unité de volume et par unité de bande passante de fréquence lumineuse $\mathrm{J/\left(m^3 \cdot Hz\right)}$. Le premier terme du membre de droite $\rho = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$ représente la densité d'oscillateurs, ou encore densité de modes, par unité de volume et unité de bande de fréquence d'oscillateur [$\mathrm{m^{-3} \cdot Hz^{-1}}$]. Son calcul peut être fait en supposant que les différents modes sont des ondes stationnaires qui doivent respecter certaines conditions limites. La procédure du décompte des modes est illustrée à la Fig. 1 et expliquée en détails dans les cours de premier cycle et est donc laissée en exercice (Cf. question 1).

Le second terme, $k_B T$, représente l'énergie moyenne, $\overline{E}_{classique}$, d'un oscillateur dont l'énergie peut prendre n'importe quelle valeur entre zéro et l'infini, et dont la densité de probabilité suit la loi de Maxwell-Boltzmann, i.e., $\Pr \propto \exp\left(-E/k_B T\right)$. On obtient :

$$\overline{E}_{classique} = \frac{\int_0^\infty E \exp\left(-E/k_B T\right) \mathrm{d}E}{\int_0^\infty \exp\left(-E/k_B T\right) \mathrm{d}E} = k_B T \, . \tag{2}$$

Il n’y a pas, dans le formalisme de Rayleigh-Jeans, de quantification de l’énergie que peut prendre chaque oscillateur; par contre, la quantification existe au niveau des valeurs de nombre d’onde permises et de la densité d’états. La loi de Rayleigh-Jeans prédisait correctement le spectre d’émission aux basses fréquences; cependant, l’équation (1) montre que la puissance diverge lorsque la longueur d’onde tend vers zéro (i.e., une fréquence qui tend vers l’infini), ce qui ne correspond évidemment pas aux résultats expérimentaux, Cf. Fig. 2. Ceci conduisit la communauté scientifique dans une impasse que l’on surnomma la ‘‘catastrophe de l’ultraviolet’’.

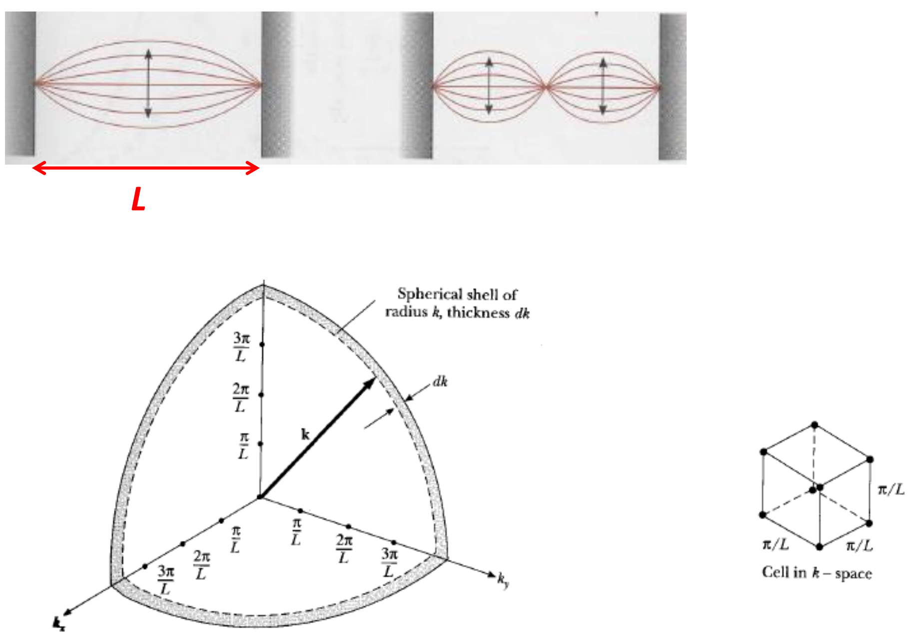

Fig. 1 En haut : ondes stationnaires dans une cavité de longueur L, soumises à des conditions de champ nul aux extrémités. Seules les valeurs des composantes du vecteur $\boldsymbol{k}$ perpendiculaires aux parois correspondant à un multiple demi-entier de longueur d’onde sont admissibles, c.-à-d., pour une boîte cubique de côté L, les valeurs admises de k_x , k_y, k_z sont un multiple de π/L. On peut ensuite estimer le nombre de modes ayant une grandeur de $\boldsymbol{k}$ plus petite qu’une certaine valeur de $\boldsymbol{k}$, en prenant le rapport entre le volume d’un huitième de sphère dans l’espace $\boldsymbol{k}$ (en bas à gauche) et celui associé à un seul mode (en bas à droite). Figure tirée de la référence [1].

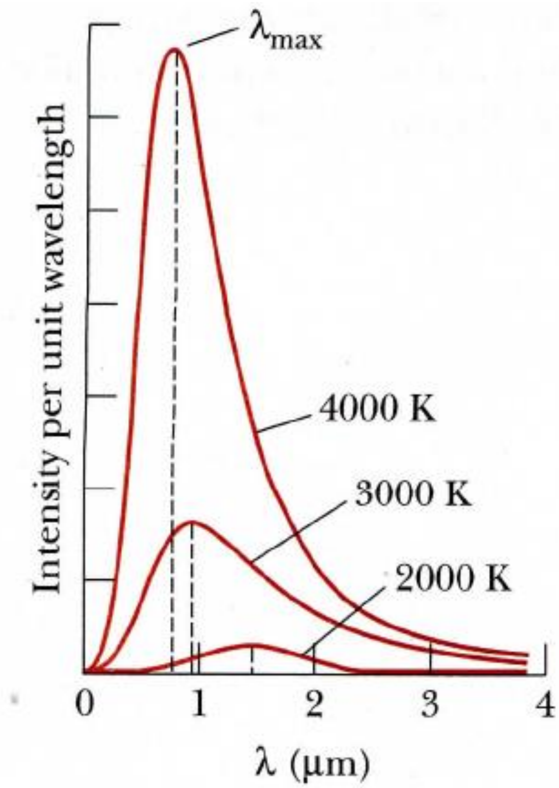

Fig. 2. Intensité émise par un corps noir en fonction de la longueur d'onde [2].

En fait, le dernier terme du membre de droite de l'expression (1) est incorrect puisqu'on a supposé à tort que les oscillateurs pouvaient prendre n'importe valeur d'énergie. En 1900, Planck a postulé que l'énergie d'un oscillateur était quantifiée [3], i.e.,

$$E = n\,h\nu\,, \tag{3}$$

où $n = 0,1,2,\ldots$ est un entier positif et h est un constante qui portera plus tard son nom : la constante de Planck. Avec cette hypothèse, le calcul de l'énergie moyenne de l'équation (2) doit être remplacé par :

$$\overline{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \exp\left(-nh\nu/k_B T\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-nh\nu/k_B T\right)}, \tag{4}$$

Ce qui donne :

$$\overline{E} = \frac{h\nu}{\exp\left(h\nu/k_B T\right) - 1}. \tag{5}$$

La combinaison de (5) avec le calcul de la densité d'états $\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$ donne la loi de Planck :

$$u = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp\left(h\nu/k_B T\right) - 1} \text{ (J/m}^3\cdot\text{Hz).} \tag{6}$$

À noter que Planck n'a pas eu à modifier le calcul de la densité d'états, même si ce dernier fait intervenir une onde stationnaire classique dans une cavité! De plus, on note que la loi de Planck (6) tend vers la loi de Rayleigh-Jeans pour des valeurs de $h\nu$ petites par rapport à k_BT. En thermodynamique statistique, on présente parfois la loi de Planck comme un produit de trois termes $\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$, h$\nu$ et $\frac{1}{\exp\left(h\nu/k_B T\right) - 1}$, qui sont respectivement la densité d'états, l'énergie d'un quantum d'excitation et le nombre moyen de quanta d'excitation dans un mode donné, qui est aussi la loi de Bose-Einstein [4] avec un potentiel chimique [5] égal à zéro.

5.2 Principe de bilan détaillé appliqué au rayonnement du corps noir

Dix-sept ans après Planck, Albert Einstein a considéré l'émission d'un corps noir sous un angle complètement différent. Il est parti du principe qu'en régime stationnaire, les taux d'absorption et d'émission des atomes sur les parois d'une cavité, utilisée comme enceinte pour simuler un corps noir, devaient être égaux afin que le nombre de photons à l'intérieur celle-ci soit constant. À l'époque, on connaissait les processus d'absorption et d'émission spontanée mais on ignorait l'existence de l'émission stimulée. Einstein a montré que, pour que la loi de Planck soit valide, il fallait, en plus de l'émission spontanée, postuler l'existence de l'émission stimulée [6]. Ces trois processus sont illustrés à la Fig. 3 et définis comme suit :

Absorption : processus par lequel un photon d'énergie $h\nu$ est absorbé par un atome initialement dans un état 1, le faisant passer à un niveau 2 d'énergie plus élevée; la différence d'énergie entre les deux niveaux, E_2-E_1, est $h\nu$.

Émission spontanée : processus par lequel un photon d'énergie $h\nu$, qui correspond à la différence d'énergie entre deux niveaux 1 et 2 d'un atome, $h\nu=E_2-E_1$, est émis par un atome initialement dans un état excité 2, le faisant passer à un niveau plus bas (niveau 1) sans qu'il y ait d'interaction avec un quantum de champ électromagnétique (photon).

Émission stimulée : processus par lequel un photon d'énergie $h\nu$ interagit avec un atome qui est déjà dans l'état excité (2); l'atome se désexcite en émettant un second photon. Ce dernier est identique au premier, c.-à-d., il a la même phase, la même direction et la même polarisation que le photon incident.

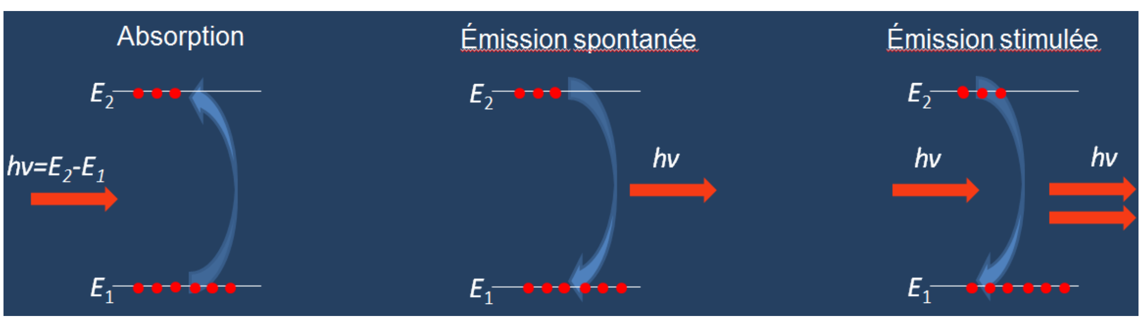

Fig. 3 Illustration des processus d'absorption, d'émissions spontanée et stimulée.

Dans ce qui suit, on considère un système à deux niveaux d’énergie. On suppose que le nombre d’atomes par unité de volume dans les niveaux discrets 1 et 2 sont N_1 *et* N_2. Ces atomes sont en interaction avec un rayonnement à large spectre de densité d’énergie $u(\nu,T)$ donnée par l’équation (6) . Einstein a postulé que le taux d’émission spontanée $W_{21,\text{sp}}$ [$m^{-3}\cdot s^{-1}$] ne dépend pas de u et est donné par :

$$W_{21,sp} = A_{21}N_2 \,. \qquad (7),$$

L’apport principal d’Einstein est qu’il a aussi postulé l’existence d’un taux d’émission stimulée $W_{21,\text{st}}$ [$m^{-3}\cdot s^{-1}$] proportionnel à u et la densité d’atomes dans l’état 2, N_2 :

$$W_{21,st} = B_{21}N_2 u \,, \qquad (8)$$

où B_{21} est le coefficient de proportionnalité. De façon analogue, un taux d’absorption W_{12} [$m^{-3}\cdot s^{-1}$] proportionnel à u et la densité d’atomes dans l’état 1 :

$$W_{12} = B_{12}N_1 u \,, \qquad (9)$$

où B_{12} est le coefficient de proportionnalité, a priori différent de B_{21}. Les coefficients B_{12}, B_{21} et A_{21} sont appelés les coefficients d‘Einstein. Ces coefficients caractérisent une transition atomique entre deux niveaux, appelés 1 et 2. Maintenant, le principe de bilan détaillé nous dit que, pour avoir un état stationnaire, il faut que les taux d’absorption et d’émission soient égaux, sinon les populations N_1 et N_2 vont changer dans le temps, contredisant l’hypothèse de régime stationnaire. Alors :

$$W_{12} = W_{21,st} + W_{21,sp} \,. \qquad (10)$$

En insérant les équations (7), (8) et (9) dans l’équation (10), on obtient:

$$B_{12}N_1u = B_{21}N_2u + A_{21}N_2 . \tag{11}$$

Ensuite, on suppose que l'équilibre thermodynamique est atteint. Dans ce cas, nous savons que le rapport de la population du niveau 2 à celle du niveau 1, N_2/N_1, est donné par la loi de Maxwell-Boltzmann :

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\exp\left(-E_2/k_BT\right)}{\exp\left(-E_1/k_BT\right)} . \tag{12}$$

Maintenant seuls les photons qui sont en résonance avec la paire de niveaux considérés peuvent être absorbés ou provoquer l'émission stimulée. En effet, la mécanique quantique montre que la probabilité de transition entre deux états est une fonction qui prend des valeurs appréciables seulement si la fréquence du champ électromagnétique se situe au voisinage de celle de la résonance, ce qui est en accord avec les phénomènes de résonance en physique classique, pour lesquels une excitation ne produit un effet appréciable sur un système que si sa fréquence est proche de la fréquence de résonance du phénomène étudié. On peut alors écrire :

$$h\nu \cong E_2 - E_1 \tag{13}$$

et alors (12) devient :

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-h\nu/k_BT\right). \tag{14}$$

L'insertion de (14) dans (11) permet d'obtenir l'expression suivante pour u:

$$u = \frac{A_{21}}{B_{12}\exp\left(h\nu/k_BT\right) - B_{21}} . \tag{15}$$

Rappelons que Planck a trouvé l'expression suivante :

$$u = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp\left(h\nu / k_B T\right) - 1} . \tag{6}$$

Ces deux équations sont compatibles si :

$$1) \quad B_{12} = B_{21} \equiv B \tag{16}$$

et

$$2) \quad \frac{A_{21}}{B} \equiv \frac{A}{B} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} , \tag{17}$$

où on a laissé tomber les indices de A_{21} et B_{12}, B_{21}, pour simplifier la notation. De plus, en insérant (16) dans (15), on trouve :

$$3) \quad u \times B = A \times \frac{1}{\exp\left(h\nu / k_B T\right) - 1} \tag{18}$$

Des équations (8,9,16), on en déduit que *les taux d'absorption et d'émission stimulée sont égaux pour des populations N_1 et N_2 égales. Les processus d'absorption et d'émission stimulée sont donc des processus réciproques l'un à l'autre.* Nous verrons en effet que lorsque l'émission stimulée domine l'absorption (ce qui arrivera si la population N_2 du niveau excité est supérieure à celle du niveau N_1), on a un phénomène d'amplification qui est tout-à-fait analogue à une absorption négative.

L'équation (17) donne quant à elle une loi d'échelle concernant l'évolution avec la fréquence du rapport de l'émission spontanée à l'émission stimulée. On voit en effet qu'en raison de la présence d'un terme en v^3, l'émission spontanée devient prépondérante à haute fréquence. Nous verrons plus tard que l'émission spontanée, bien que nécessaire pour déclencher l'oscillation laser, entre en compétition avec l'émission stimulée, laquelle est à la base du fonctionnement des lasers : un plus haut taux d'émission spontanée rend plus difficile l'atteinte du seuil d'oscillation. En effet, ce dernier correspond à une quantité minimale d'atomes placés dans leur état excité mais l'émission spontanée vide le niveau excité et rend l'obtention de ce seuil plus difficile. Cette loi d'échelle en v^3 de l'éq. (17) explique aussi pourquoi les lasers émettant dans l'UV sont plus difficiles à réaliser (et donc moins répandus) que les lasers émettant dans le visible ou l'infrarouge.

Étudions maintenant l'équation (18) plus en détails. Le membre de gauche peut être interprété comme le taux d'émission stimulée par atome associé à un rayonnement incohérent de densité énergétique u autour de la fréquence v. Ce taux correspond à une émission dans tous les modes, décrits par leur nombre d'onde et leur polarisation à la fréquence v. On peut donc dire que le membre de gauche correspond à l'émission stimulée par atome dans tous les modes correspondant à la fréquence v. Le premier terme du membre de droite représente le taux d'émission spontanée par atome dans tous les modes correspondant à la fréquence v. Le second terme du membre de droite, $\frac{1}{\exp\left(hv/k_BT\right)-1}$, représente le nombre moyen de photons par mode. On a donc le résultat suivant :

$$\frac{\text{taux d'émission stimulée dans tous les modes}}{\text{taux d'émission spontanée dans tous les modes}} = \text{nombre de photons dans un des modes}$$

Maintenant le nombre de modes concernés dans le numérateur et le dénominateur est évidemment le même. On peut donc écrire:

$$\frac{\text{taux d'émission stimulée par mode} \times \text{nombre de modes}}{\text{taux d'émission spontanée par mode} \times \text{nombre de modes}} = \frac{\text{taux d'émission stimulée dans un mode}}{\text{taux d'émission spontanée dans un mode}}$$

Finalement, on trouve :

$$\frac{\text{taux d'émission stimulée dans un mode}}{\text{taux d'émission spontanée dans le même mode}} = \text{nombre de photons dans ce mode} \qquad (19)$$

On arrive ainsi à l’importante conclusion que *le taux d’émission stimulée dans un mode est égal au taux d’émission spontanée dans ce mode multiplié par le nombre de photons dans ce mode.*

Ce résultat a été établi dans le cas où l’équilibre thermodynamique est atteint; mais comme ces taux sont des quantités spectroscopiques, ils ne dépendent pas des populations N_1 et N_2. On peut donc penser (à juste titre!) que ce résultat est valable en général. La théorie quantique de l’interaction de la lumière avec la matière confirme cette hypothèse [7]. Notez que le taux d’émission spontanée dans un mode donné est très petit par rapport à A, puisque ce dernier représente le taux d’émission dans *tous* les modes, i.e., sans égard à la direction du vecteur $\boldsymbol{k}$ ou à la polarisation du photon. Or le nombre de modes dans lesquels l’émission spontanée peut avoir lieu dans une situation typique est énorme, comme nous le verrons plus tard.

5.3 Analyse d’Einstein dans le cas d’un spectre de rayonnement étroit par rapport à une raie de transition.

Dans la section précédente, nous avons considéré l’émission d’un corps noir et ainsi supposé que le spectre de rayonnement électromagnétique dans lequel baigne un atome était large par rapport à une raie de transition. Cependant, dans le cas de l’émission laser, il arrive très fréquemment que le spectre d’émission est très monochromatique, au point d’être beaucoup plus étroit que la largeur d'une raie spectrale. Dans la plupart des cas, la largeur d'une raie spectrale associée à deux niveaux atomiques est inversement proportionnelle aux temps de cohérence de l'émission de l'état excité [8]. Nous verrons au chapitre 9 les mécanismes qui limitent la cohérence de l'émission spontanée d'une raie. Cette largeur de raie est en général beaucoup plus grande que la largeur naturelle de la raie, laquelle est l'inverse du temps de vie spontané du niveau supérieur. Soit $g(v)$ la densité de probabilité d'émission de photon par émission spontanée à la fréquence v, c.-à-d. $g(v)\mathrm{d}v$ est la probabilité d'émission d'un photon dans la bande spectrale de largeur dv centrée autour de v. La fonction de densité de probabilité g(v) est normalisée : $\int g(v)dv = 1$. On appelle $g(v)$ la fonction ''forme de raie''. La largeur de la raie d'émission est la même que celle de g(v).

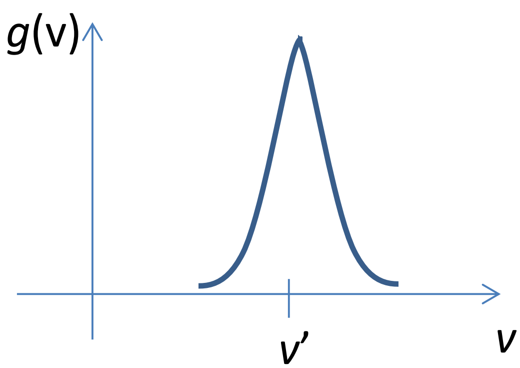

Fig. 4. Illustration d'une fonction de densité de probabilité d'émission de photon associé à une paire de niveaux.

La probabilité d'émission spontanée a par unité de temps et unité de fréquence s'écrit :

$$a(v) = Ag(v), \tag{20}$$

où $\int a(\nu)\mathrm{d}\nu = A$. On considère ici le cas où la largeur de la distribution g, $\Delta\nu$, est très grande devant la largeur du rayonnement $u(\nu)$ (en J/m^3·Hz). Si le rayonnement est très étroit par rapport à $\Delta\nu$ et est centré autour de la fréquence ν', alors à l'échelle de $\Delta\nu$, nous pouvons écrire :

$$u(\nu) \approx U\delta(\nu' - \nu)\,, \tag{21}$$

où δ est la fonction delta de Dirac et U est la densité d'énergie, en J·m^{-3}, intégrée sur tout le spectre. Pour chacune des fréquences, les taux d'émission spontanée et stimulée existent dans un rapport bien défini, établi par l'éq. 17. On peut alors supposer que le coefficient B varie lui aussi avec la fréquence de la même manière que le paramètre A, comme suit :

$$b = Bg(\nu)\,, \tag{22}$$

où l'on a défini un coefficient d'Einstein modifié b pour décrire le taux d'émission stimulée par unité de fréquence ν. Ainsi, le profil de $b(\nu)$ suit exactement celui de $a(\nu)$. Alors le taux d'émission stimulée par unité de volume, de temps et de fréquence [m^{-3}·s^{-1}·Hz^{-1}] s'écrira:

$$\frac{\mathrm{d}W_{21,st}}{\mathrm{d}\nu} = bN_2 u\,, \tag{23}$$

En insérant (21) et (22) dans (23), puis en intégrant, on trouve :

$$W_{21,st}(\nu') = N_2 B \int g(\nu) U \delta(\nu' - \nu) d\nu = N_2 B g(\nu') U\,. \tag{24}$$

De manière similaire, nous pouvons écrire pour le taux d'absorption:

$$W_{12}(\nu') = N_1 B g(\nu') U\,. \tag{25}$$

5.4 Exemple d'application numérique

On considère un laser Hélium-Néon monomode transverse et monomode longitudinal émettant une puissance de P_{out}=0.5 mW dans le mode TEM_{00} à une longueur d'onde λ=632.8 nm. Le rayon du faisceau (bien collimaté) est de $w \approx 400$ μm et la largeur spectrale de la raie de transition donnant lieu à l'effet laser est de 19 MHz. Le coupleur de sortie à une réflectance (en intensité) de R=99% et le résonateur a une longueur L=30 cm. On demande d'estimer le ratio entre les taux d'émission stimulée et spontanée pour la transition impliquée dans l'effet laser.

Solution :

D'abord, en comparant les équations (7) et (25):

$$W_{21,sp} = A_{21}N_2 \ , \tag{7}$$

$$W_{21,st}(\nu') = N_2 B_{21} g(\nu') U \ , \tag{25}$$

on tire :

$$\frac{W_{21,st}(\nu')}{W_{21,sp}(\nu')} = \frac{B_{21} g(\nu') U}{A_{21}} . \tag{26}$$

Ensuite, en insérant (17) dans (26), on trouve :

$$\eta = \frac{W_{21,st}(\nu')}{W_{21,sp}(\nu')} = \frac{c^3 g(\nu') U}{8\pi h \nu'^3} . \tag{27}$$

Maintenant l'énergie par unité de volume U est égale à la puissance interne P_{int} dans le mode du résonateur par unité de surface S=πw^2 divisée par la vitesse de la lumière:

$$U = \frac{P_{\text{int}}}{\pi w^2} \times \frac{1}{c}, \tag{28}$$

où l'on a supposé l'indice n dans le résonateur égal à un. Par ailleurs, la puissance interne dans le résonateur est donnée en fonction de la puissance de sortie P_{sor} par :

$$P_{\text{int}} = \frac{P_{sor}}{1-R} \times 2, \tag{29}$$

où P_{sor} est la puissance de sortie.

En insérant (29) dans (28), on trouve :

$$U = \frac{2P_{sor}}{\pi w^2 (1-R)c} \tag{30}$$

Ensuite, du fait que la fonction forme de raie g est normalisée, i.e., $\int g(v)dv = 1$, on a environ:

$$g(v') \approx \frac{1}{\Delta v} \tag{31}$$

Pour avoir la relation exacte entre la hauteur de g en v' et sa largeur à mi-hauteur, il faudrait connaître la fréquence v' et la forme de la fonction g, par exemple une forme gaussienne ou Lorentzienne, etc. Dans le cas d'une raie d'émission du néon, la forme est Lorentzienne et la fonction $g(v)$ s'écrit:

$$g(v') \approx \frac{2}{\pi \Delta v} \frac{1}{1 + 4\left(\frac{v' - v_0}{\Delta v}\right)^2}, \tag{32}$$

ce qui donne :

$$g(\nu_0) \approx \frac{2}{\pi \Delta \nu}. \tag{33}$$

Finalement, en insérant (30) et (33) dans (27), et en évaluant autour de ν_0, on trouve :

$$\eta = \frac{W_{21,st}(\nu' = \nu_0)}{W_{21,sp}} \approx \frac{c^2}{2\pi^3 h \nu_0^{\ 3} \Delta \nu} \frac{P_{out}}{w^2(1-R)} \tag{34}$$

En remplaçant les valeurs numériques dans (34), on trouve un ratio de l'ordre de η≈340. Donc, pour cette puissance interne, l'émission stimulée domine l'émission spontanée autour de λ=632.8 nm par plus de deux ordres de grandeur. Notez qu'il ne faut pas confondre le facteur η que l'on vient de calculer avec le rapport entre les taux d'émission stimulée et spontanée *dans le même mode TEM₀₀*, que l'on vous demande de calculer à la question 7. Ce dernier rapport est important car il détermine la largeur spectrale ultime d'une raie laser, une fois que les autres causes d'élargissement, telles que les vibrations thermomécaniques du résonateur, ont été supprimées : on appelle cette limite la largeur de Schawlow-Townes [9].

5.5 Conclusions

En utilisant le fait qu'en régime stationnaire, les taux d'émission (spontanée $W_{21,sp} = A_{21} N_2$ et stimulée $W_{21,st} = B_{21} N_2 u$) et d'absorption ($W_{12} = B_{12} N_1 u$) doivent être égaux pour maintenir les populations d'atomes à l'équilibre thermodynamique, Einstein est arrivé à la formule :

$$u = \frac{A_{21}}{B_{12} \exp(h\nu / k_B T) - B_{21}}, \tag{15}$$

En comparant cette formule avec la loi de Planck, éq. (6), on peut tirer plusieurs conclusions très importantes : d'abord $B_{12} = B_{21}$, donc que l'absorption et l'émission stimulée jouent des rôles symétriques l'un de l'autre, ensuite que les taux d'émission spontanée et stimulée ne sont pas indépendants mais existent dans un rapport bien défini : $\frac{A}{B} = \frac{8\pi h v^3}{c^3}$ (17) et finalement que *le taux d'émission stimulée dans un mode est égal au taux d'émission spontanée (dans ce mode) multiplié par le nombre de photons (dans ce mode).* Cette dernière loi est utile pour calculer le rapport entre le nombre de photons dans un mode issus de des émissions stimulée et spontanée. Si on s'attache plutôt à décrire l'interaction d'un spectre de rayonnement étroit par rapport à une raie d'émission, qui est une situation qui s'applique à l'interaction d'une émission laser avec de la matière, alors il faut définir la fonction forme de raie *g(v)* est la fonction de densité de probabilité d'émission spontanée à la fréquence *v*. On est alors amenés à décrire le rayonnement non pas par *u* (J/m^3/Hz) mais par une densité d'énergie par unité de volume, *U* (J/m^3). Les taux d'émission spontanée, stimulée et d'absorption s'expriment alors respectivement par :

$a(v) = Ag(v)$ (20), $W_{21,st}(v) = N_2 Bg(v)U$ (24) , et $W_{12}(v) = N_1 Bg(v)U$ (25).

<u>Questions</u>

1. Montrer que la densité d'oscillateur par unité de volume et par unité de fréquence est donnée par : $\rho(v) = \frac{8\pi v^2}{c^3}$, en m$^{-3}\cdot$Hz^{-1}.

2. Partant du résultat de la question 1, montrer que la densité d'oscillateur par unité de volume et par unité de longueur d'onde est donnée par : $\rho(\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^4}$.

3. À la question précédente, les unités de $\rho(\lambda)$ sont en m^{-4}. Comment expliquez-vous cela?

4. Montrer comment l'équation (4) mène à l'équation (5).

5. Déterminer les unités des trois coefficients d'Einstein : B_{12}, B_{21} et A_{21}.

6. D'où vient le facteur 2 dans l'équation (29)?

7. Calculer le rapport entre les taux d'émission stimulée et spontanée *dans le mode TEM_{00}* pour l'exemple donné à la section 5.4.

8. Trouver l'expression permettant de généraliser les équations (8) et (25) pour le cas où la fonction forme de raie $g(\nu)$ et le spectre de rayonnement $u(\nu)$ sont de largeurs comparables.

Références et commentaires

---

[1] Figures tirées du livre : R. A. Serway, C. J. Moses, C. A. Moyer *Modern Physics 2ème Édition*, Saunders College Publishing, 1997, p. 91.
[2] Figure tirée du livre *Modern Physics 2ème Édition*, p.58.
[3] M. Planck, Ann. Physik, (4) 553, 1901.
[4] Voir chap. 9 de F. Reif, Fundamentals of statistical and thermal physics, McGraw-Hill, 1965.
[5] Voir section 8.7 de F. Reif, Fundamentals of statistical and thermal physics, McGraw-Hill, 1965.
[6] A. Einstein, *Zur quanten theorie der strahlung (Sur la théorie quantique du rayonnement)*, Phys. Zeit. **18** 121-128, 1917
[7] Voir C. Cohen-Tanoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynbert, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, EDP sciences, 1996.
[8] La largeur d'une raie dépend aussi du temps de cohérence du niveau bas de la transition concernée sauf si celui-ci est le niveau fondamental.
[9] A. L. Schawlow and C. H. Townes, *Infrared and optical masers*, Phys. Rev. 112 (6), 1940 (1958).