

Chapitre 4. Les modes d'un résonateur : partie 2.

Les modes gaussiens d'un résonateur géométriquement stable.

Objectifs spécifiques:

- 1) *Savoir utiliser le formalisme matriciel pour la détermination du rayon de courbure complexe d'un mode gaussien à n'importe quelle position dans un résonateur;*
- 2) *établir les conditions qui permettent d'obtenir un mode gaussien dans un résonateur et en particulier les contraintes concernant les éléments de la matrice qui lui sont associés;*
- 3) *établir le domaine de stabilité géométrique d'un résonateur de géométrie quelconque en fonction de la distance entre les miroirs, leur rayon de courbure, incluant la présence éventuelle de lentilles à l'intérieur de celui-ci;*
- 4) *saisir la différence entre des résonateurs stable et instable dans le contexte de l'optique géométrique;*
- 5) *savoir reconnaître les indices m et n d'un mode d'Hermite-Gauss à partir de l'allure de la distribution spatiale d'intensité ou de champ complexe;*
- 6) *interpréter l'effet du déphasage de Gouy sur la forme d'une impulsion ultra-courte (i.e., de quelques cycles) au cours de sa propagation;*
- 7) *établir la condition de résonance d'un mode quelconque dans un résonateur et en déduire les longueurs d'onde qui peuvent y résonner;*
- 8) *comprendre la notion d'intervalle spectral libre et savoir le calculer;*
- 9) *savoir calculer le spectre de transmission d'un résonateur Fabry-Pérot;*
- 10) *pouvoir calculer les propriétés géométriques d'un laser commercial à partir de ses spécifications.*

4.1 Mode fondamental gaussien d'un résonateur et condition d'existence du mode [1].

On considère maintenant un résonateur constitué de seulement deux miroirs sphériques de rayons R_1 et R_2 placés l'un en face de l'autre et espacés d'une distance L (Cf. Fig. 1 à droite). On cherche à savoir si un mode gaussien peut exister dans un tel résonateur et, si c'est le cas, on voudra aussi calculer les paramètres de ce mode gaussien, i.e., le rayon de courbure complexe et le déphasage de Gouy. Nous avons vu au chapitre 2 qu'un mode d'un résonateur correspond à une solution de l'équation aux valeurs propres de l'opérateur correspondant aller-retour dans le résonateur. L'aller-retour à partir d'une propagation sur une distance L correspond au produit de matrices suivantes ¹: $M = R(R_1)T(L)R(R_2)T(L) \equiv \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, i.e., un déplacement sur une distance L suivi d'une réflexion par le premier miroir de rayon de courbure R_2 , suivie d'un déplacement sur une distance L et finalement d'une réflexion par le miroir de rayon de courbure R_1 [2]. Notons que les quatre éléments de la matrice M sont réels.

Comment exprime-t-on, en fonction de la matrice M , la condition de réplique dans un aller-retour dans le résonateur? Il s'agit tout simplement d'imposer $q_1=q_2$ dans l'équation 3.34, Cf. chapitre 3. On obtient alors :

$$\hat{q} = \frac{A\hat{q} + B}{C\hat{q} + D}, \quad (3.34)$$

que l'on peut réécrire sous la forme:

$$\hat{q}^{-1} = \frac{C + D\hat{q}^{-1}}{A + B\hat{q}^{-1}}. \quad (1)$$

Il s'agit d'une équation polynomiale du deuxième degré qui possède deux solutions :

¹ Évidemment, le point de départ peut être choisi n'importe où sans que cela change l'allure du mode dans le résonateur.

$$\hat{q}^{-1} = \frac{(D-A) \pm \sqrt{(D-A)^2 + 4BC}}{2B}. \quad (2)$$

Maintenant, l'existence de modes gaussiens exige que \hat{q} possède une partie imaginaire. Ceci est nécessaire pour que la largeur du faisceau gaussien, w , soit bien définie, Cf. éq. 3.20. On peut montrer que ceci implique que :

$$\left| \frac{A+D}{2} \right| < 1, \quad (3)$$

i.e., que la demi-trace soit comprise entre -1 et 1. Ensuite, la comparaison de l'éq. (2) avec l'éq. (3.20) permet d'identifier laquelle des deux solutions de l'équation (2) produit une valeur réelle positive de w : c'est celle qui doit être retenue. Donc, pour avoir l'existence d'un mode gaussien dans un résonateur, il faut non seulement que la condition de réplication du mode dans un aller-retour, représentée par l'éq. (1), soit remplie mais aussi que le mode soit confiné à l'intérieur du résonateur, ce qui est représenté par l'équation (3).

Maintenant, en toute rigueur, il faut remarquer que les deux conditions (1) et (3) ne sont pas suffisantes en soi pour avoir l'existence d'un mode gaussien pour ce résonateur : il faut aussi vérifier qu'une petite perturbation de la solution trouvée en (2) ne va pas s'amplifier en cours de propagation dans le résonateur et détruire la structure du mode! Cette condition peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\hat{q}_2 + \delta\hat{q}_2 = \frac{A(\hat{q}_1 + \delta\hat{q}_1) + B}{C(\hat{q}_1 + \delta\hat{q}_1) + D}, \quad (4)$$

où

$$\left\| \frac{\delta\hat{q}_2}{\delta\hat{q}_1} \right\| \leq 1. \quad (5)$$

L'équation (5) indique que la perturbation initiale $\delta\hat{q}_1$ ne s'amplifie pas en cours de propagation. Notez que, $\delta\hat{q}_1$ et $\delta\hat{q}_2$ étant complexes, les deux barres verticales s'interprètent comme la norme d'un nombre complexe, et non comme une valeur absolue. On peut montrer que, pour un résonateur conventionnel composé de miroirs paraboliques et de lentilles, si la condition de stabilité (3) du mode calculé par l'équation (2) est satisfaite, la condition (4,5) le sera aussi (Cf. Problème 19). Autrement dit, la condition donnée par les équations (4) et (5) n'introduit pas de contraintes supplémentaires sur l'existence d'un mode gaussien.

L'équation (3) est la condition de stabilité dite "géométrique" d'un résonateur. Dans le cas particulier d'un résonateur classique fait de deux miroirs paraboliques placés l'un en face de l'autre, la condition (3) s'écrit:

$$0 < g_1 g_2 < 1 \tag{6}$$

où $g_i = 1 - \frac{L}{R_i}$, et R_i est positif (négatif) si le miroir est concave (convexe) vers l'intérieur du résonateur.

Les valeurs de g_1 et g_2 qui produisent un mode gaussien dans le résonateur peuvent se représenter facilement sur un graphique g_2 en fonction de g_1 , où la zone de stabilité est hachurée (voir Fig. 1).

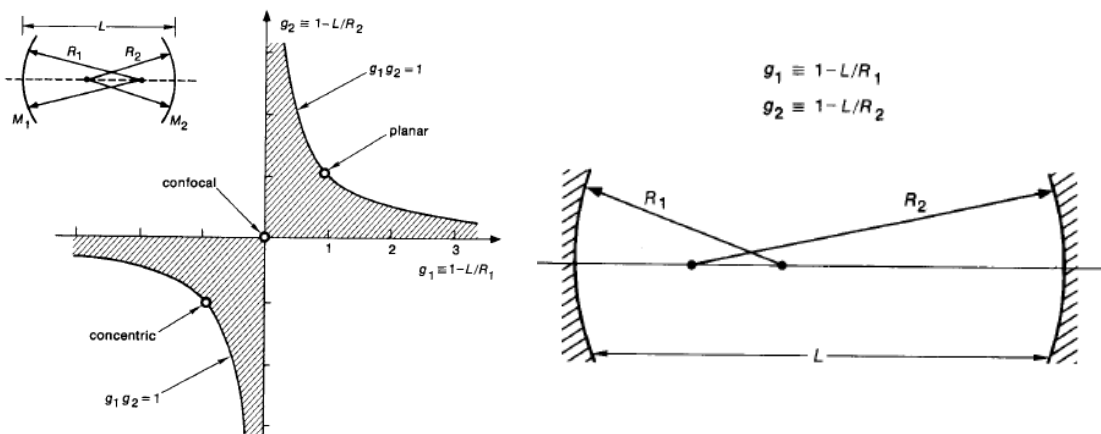


FIGURE 19.4
The stability diagram for a two-mirror optical resonator.

Fig. 1. Illustration du domaine de stabilité d'un résonateur (formule (6)). [3]

Le domaine de stabilité d'un résonateur a une interprétation simple en optique géométrique : si on prend un rayon paraxial arbitraire, i.e., faiblement incliné et proche de l'axe du résonateur, et que ce rayon reste confiné dans le résonateur au fur et à mesure qu'il se propage à l'intérieur de celui-ci, alors le résonateur est stable. Autrement dit, l'angle α et la position x du rayon - le vecteur $(x, n\alpha)^T$ - resteront bornés quel que soit le nombre d'allers-retours parcourus dans le résonateur (Cf. Fig. 2a). Dans le cas contraire, i.e., si la condition (3) n'est pas respectée, alors les rayons vont diverger au fur et à mesure de leur propagation dans le résonateur (Cf. Fig. 2b).

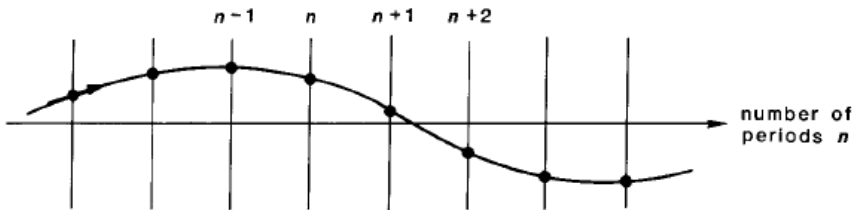


FIGURE 15.15
Ray trajectory in a stable periodic system.

Fig. 2a. Exemple d'évolution de la position d'un rayon dans un résonateur géométriquement stable en fonction du nombre de périodes. La position et l'angle du rayon restent bornés au fur et à mesure de la propagation (Cf. [4]).

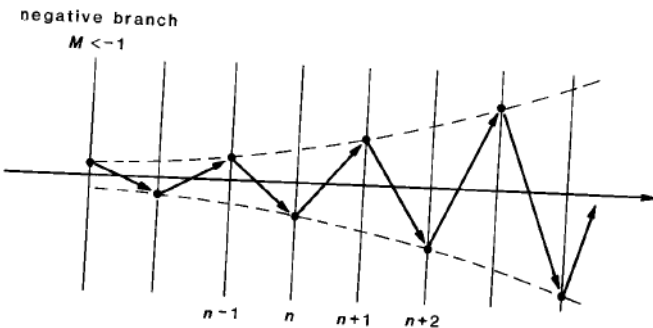


Fig. 2b. Exemple d'évolution de la position d'un rayon dans un résonateur géométriquement instable en fonction du nombre de périodes. La position et l'angle du rayon divergent au fur et à mesure de la propagation.

4.2 Les modes d'ordre supérieur en coordonnées cartésiennes : les modes d'Hermite-Gauss [5].

La distribution gaussienne n'est pas la seule solution qui peut se reproduire dans un aller-retour dans un résonateur muni de miroirs paraboliques dans le cadre de l'optique paraxiale. En fait, il existe une infinité d'autres solutions, qui forment une famille, et qui, dans le cas où elles sont séparables en coordonnées cartésiennes, s'appellent les modes d'Hermite-Gauss. Leur champ complexe u_{mn} pour une géométrie axisymétrique s'écrit [6]:

$$u_{mn} = u_0 \frac{w_0}{w(z)} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2} + \frac{ik(x^2 + y^2)}{2R(z)} - i(m+n+1)\psi(z) \right), \quad (7)$$

où n et m sont des entiers positifs et les H_m sont les polynômes d'Hermite de degré m , dont en voici quelques-uns :

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\ &\dots \end{aligned} \quad (8)$$

L'évolution de w , r et ψ avec z est celle donnée par les équations 3.26, 3.27, 3.28. Notez que u_{00} correspond au mode fondamental gaussien. De plus, le déphasage de Gouy, $(m+n+1)\arctan\left(\frac{z}{z_r}\right)$, diffère selon l'ordre du mode; nous verrons que ceci a une influence directe sur les fréquences de résonance d'un mode m, n . On peut aussi montrer que les modes d'Hermite-Gauss forment un ensemble complet de fonctions; ceci veut dire qu'on peut représenter à peu près n'importe quelle distribution de champ électrique $u(x,y)$ par une superposition (cohérente) de modes d'Hermite-Gauss avec les coefficients c_{mn} appropriés. Ces derniers sont aussi mutuellement orthogonaux. Finalement, le profil spatial d'intensité des modes u_{mn} reste, à un facteur d'échelle près, invariant avec z .

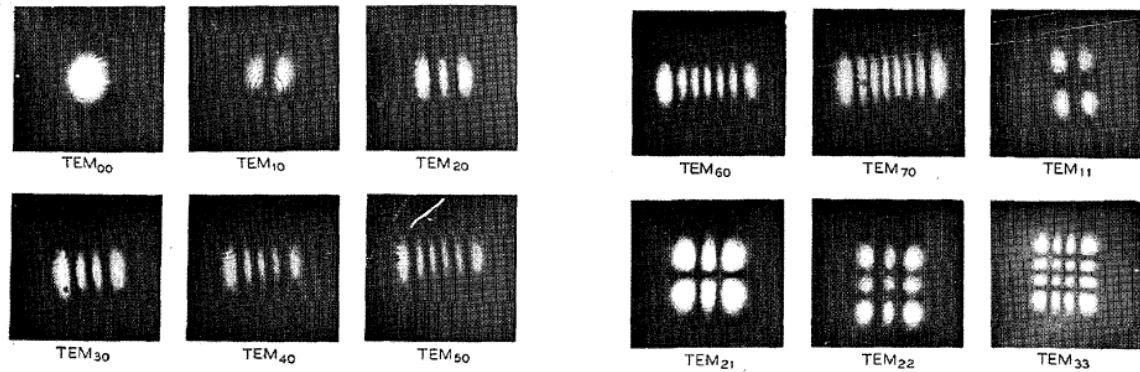


Fig. 3. Exemples de distributions d'intensité de modes d'Hermite-Gauss d'ordres divers. [7]

4.3 Condition de résonance et modes longitudinaux. [8]

Quand nous avons considéré la condition de reproduction du champ u afin de déterminer la structure d'un mode au chapitre 2, nous avons considéré la reproduction, à un facteur constant près, de la distribution transverse du champ complexe au cours d'un aller-retour dans le résonateur, mais nous n'avons pas porté attention au spectre des valeurs propres γ_{mn} de l'opérateur aller-retour M . En effet, puisqu'on a considéré un système périodique équivalent au résonateur, on ne s'est pas soucié du déphasage, ni de l'atténuation de l'onde au cours d'un aller-retour.

Par contre, on sait que, pour un résonateur de type Fabry-Perot, une onde stationnaire doit se former à l'intérieur de celui-ci pour que l'énergie puisse s'y emmagasiner. Ceci impose des valeurs particulières au déphasage de l'onde électromagnétique au cours d'un aller-retour dans le résonateur. En particulier, il faut qu'une condition de résonance soit remplie et ceci se produit si le déphasage dans un aller-retour est un multiple de 2π . Ceci est nécessaire pour créer une condition d'interférence constructive entre les ondes successives qui arrivent à un endroit donné dans le résonateur.

Nous allons maintenant calculer la condition de résonance d'un résonateur constitué de deux miroirs sphériques. Pour simplifier, supposons que la réflexion sur les miroirs n'introduit aucun déphasage additionnel [9]. Soient z_1 et z_2 les coordonnées respectives des deux miroirs sur l'axe optique.

$$E_{mn} = u_{mn} \exp(ikz) \propto \exp(ikz - i(m+n+1)\psi(z)), \quad (9)$$

où l'on a gardé dans l'équation (9) uniquement les termes de déphasage. Les phases respectives des fronts d'onde sur l'axe optique aux deux miroirs s'écrivent respectivement :

$$\phi(z_1) = kz_1 - (m+n+1)\psi(z_1); \quad (10)$$

$$\phi(z_2) = kz_2 - (m+n+1)\psi(z_2). \quad (11)$$

De plus, la condition de résonance s'écrit :

$$\phi(z_2) - \phi(z_1) = p\pi, \quad (12)$$

où p est un entier. En combinant les équations (10) à (12), on trouve :

$$k_{mnp}L - (m+n+1)(\psi(z_2) - \psi(z_1)) = p\pi, \quad (13)$$

où $L = z_2 - z_1$ est la longueur du résonateur et k_{mnp} est la valeur particulière de k qui satisfait à l'équation (13) pour les valeurs de m , n et p considérées. La valeur de k_{mnp} dépend du mode transverse considéré, puisqu'elle dépend des indices m et n . Par contre, si on calcule, pour un couple donné de valeurs m et n , la différence entre deux fréquences de résonance consécutives, nous avons bien sûr :

$$v_{mnp} = \frac{k_{mnp}c}{2\pi}, \quad (14)$$

et alors :

$$\Delta v_{ISL} \equiv v_{mn,p+1} - v_{mn,p} = \frac{c}{2L}. \quad (15)$$

Cet intervalle entre deux modes consécutifs p et $p+1$ de mêmes indices m et n , TEM_{mnp} et $TEM_{mn,p+1}$, s'appelle l'intervalle spectral libre (ISL), qui ne dépend pas du choix des indices m et n de mode transverse. Les modes qui ont les mêmes valeurs de m et n mais qui diffèrent par leur indice p sont des modes ayant presque la même distribution transverse de champ électrique mais qui diffèrent par leur fréquence. Les trois indices m , n et p et la direction de la polarisation spécifient un mode de façon unique; les deux premiers indices dictent la distribution transverse du champ électrique. On peut dire que les indices m et n dictent les propriétés spatiales du faisceau, et en particulier la capacité de focaliser le faisceau sur une petite surface, ce que certains appellent la "qualité" de faisceau. L'indice p , appelé aussi l'indice longitudinal du mode, dicte en premier lieu la fréquence d'émission. Finalement deux polarisations orthogonales (horizontale/verticale, ou circulaires gauche/droite, etc, dépendamment de la base choisie) existent pour chacun de ces trois indices.

Pour un résonateur de plusieurs centimètres de longueur, l'ISL est très court et il devient difficile de résoudre les différents modes, même avec un monochromateur de très haute résolution. En revanche, pour un microchip laser, qui est un laser à l'état solide dont les miroirs sont fabriqués directement sur une plaquette de milieu actif, l'épaisseur de la plaquette est de l'ordre du millimètre, voire moins, et les différents modes longitudinaux sont alors suffisamment espacés pour pouvoir les visualiser avec un spectromètre commercial bon marché (Cf. Fig. 4).

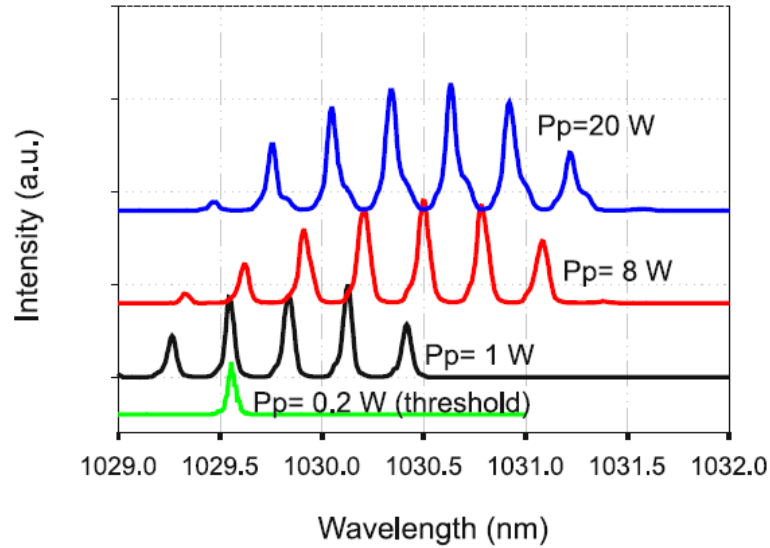


FIGURE 8 Emission spectrum of the microchip at various absorbed pump powers (0.2, 1, 8 and 20 W). The spectra are vertically shifted for clarity

Fig. 4. Spectre d'émission d'un microchip $Y_3Al_5O_{12}$ dopé à l'ytterbium trivalent Yb^{3+} . [10]

4.4. Conclusions

En conclusion, le paramètre \hat{q} décrivant un mode gaussien dans un résonateur décrit par une matrice ABCD est donné par l'équation:

$$\hat{q}^{-1} = \frac{(D-A) \pm \sqrt{(D-A)^2 + 4BC}}{2B}. \quad (2)$$

La condition pour que le résonateur admette un mode gaussien stable est :

$$\left| \frac{A+D}{2} \right| < 1. \quad (3)$$

La condition (3) est une condition d'existence d'un mode gaussien dans un résonateur de géométrie donnée.

Outre les faisceaux gaussiens, il existe une infinité de profils de modes qui se répliquent dans un résonateur respectant la condition (3), par exemple la famille des modes d'Hermite-Gauss :

$$u_{mn} = u_0 \frac{w_0}{w(z)} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2} + \frac{ik(x^2 + y^2)}{2R(z)} - i(m+n+1)\psi(z) \right), \quad (7)$$

Les modes sont alors décrits par deux indices, m et n , pour le profil transverse.

La condition de résonance des modes dans un résonateur impose que le déphasage accumulé dans un aller-retour soit un multiple de 2π . Cette condition s'écrit pour un résonateur à onde stationnaire :

$$k_{mnp}L - (m+n+1)(\psi(z_2) - \psi(z_1)) = p\pi, \quad (13)$$

qui fait apparaître des valeurs discrètes des fréquences de résonance qui, pour des modes transverses identiques TEM_{mn}, sont équidistants:

$$\Delta v_{ISL} \equiv v_{mn,p+1} - v_{mn,p} = \frac{c}{2L}. \quad (15)$$

On appelle cet intervalle, l'intervalle spectral libre et l'indice p est un entier indiquant le nombre de longueurs d'onde dans un cycle complet.

Questions et problèmes

1. L'équation (2) donne les deux racines de l'équation quadratique. Ces deux racines sont-elles acceptables pour un mode gaussien? Laquelle des deux peut être conservée?
2. Expliquer l'origine de la condition (3) en montrant le calcul qui y mène et le sens physique qui lui est associé.
3. Si la condition (3) n'est pas vérifiée, est-ce que l'on peut conclure que le résonateur n'admet aucun mode?
4. Montrer l'équivalence de (3) et (4) dans le cas particulier du résonateur à ondes stationnaires. Note : un résonateur à onde stationnaire est défini par opposition à un résonateur en anneau, où l'onde se propage

dans une seule direction. Tous les exemples vus jusqu'ici sont des résonateurs à onde stationnaire où l'onde fait des allers-retours dans celui-ci.

5. Sachant que l'épaisseur du microchip est d'un millimètre, pouvez-vous estimer l'indice de réfraction de l'élément actif pour la Fig. 4?

6. Considérer le résonateur Fabry-Perot montré à la Fig. 5. Tracer l'allure de la courbe de transmission du FP en fonction de la fréquence dans le cas où $R_1=R_2=0.99$, puis dans le cas où $R_1=R_2=0.5$.

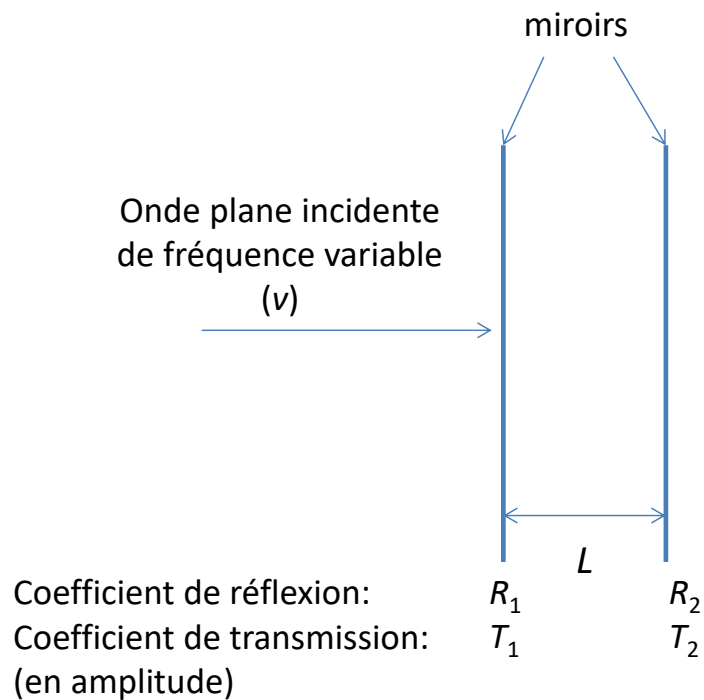


Fig. 5. Résonateur Fabry-Perot constitué de deux miroirs plans séparés d'une distance L .

7. Considérer un résonateur Fabry-Perot asymétrique dont les coefficients de réflexion et transmission complexes sont r_1 , r_2 , t_1 et t_2 . On considère une lumière incidente sur le miroir 1 [11].

a) Montrer que le coefficient de réflexion complexe du résonateur est donné par :

$$r = \frac{-r_1 + r_2 (r_1^2 + t_1^2) \exp(i2kL)}{1 - r_1 r_2 \exp(i2kL)}$$

b) Montrer que r satisfait à l'équation d'un cercle dans le plan complexe. Donner la position du centre et la valeur du rayon de ce cercle.

Réponse : centre en $z_c = \frac{r_1}{1-r_1^2-r_2^2} (1-r_2^2(r_1^2+t_1^2))$ et rayon $R = \text{grandeur} \left(\frac{t_1^2 r_2}{1-r_1^2 r_2^2} \right)$.

c) On dit que le résonateur est couplé de façon critique si la réflexion à la résonance passe par zéro. Montrer que cette condition est satisfaite si : $r_1(1-r_2^2(r_1^2+t_1^2))=t_1^2 r_2$.

d) Le résonateur sans pertes et avec $r_1 = r_2$ satisfait à la condition donnée en c), mais ce cas symétrique n'est pas la seule solution. Montrer que le couplage critique est obtenu si : $r_2 = \frac{t_1^2 + \sqrt{t_1^4 + 4r_1^2(r_1^2 + t_1^2)}}{2r_1(r_1^2 + t_1^2)}$.

8. Considérer la situation à la Fig. 6 où le rayonnement est complètement transmis à travers un résonateur Fabry-Perot. Expliquer comment une telle situation est possible malgré le fait que chacun des deux miroirs est très réfléchissant (ex. coefficient de réflexion en amplitude $R=0.995$).

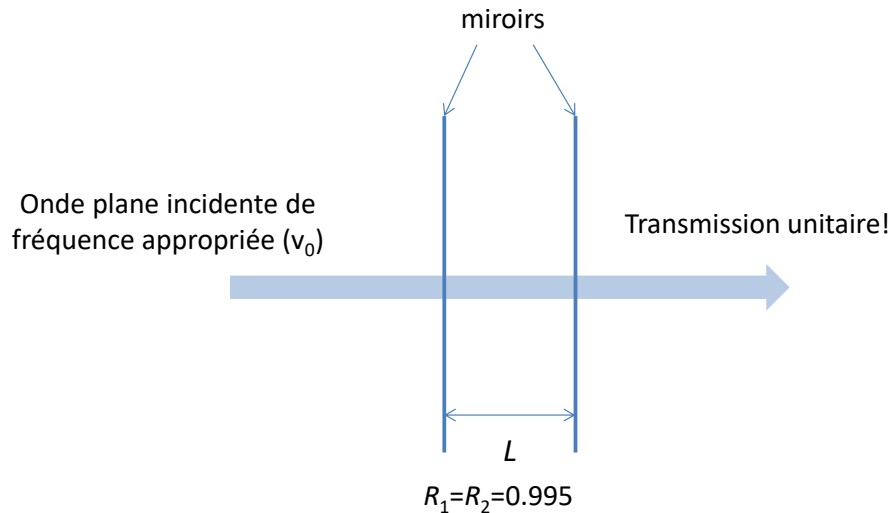


Fig. 6. Situation où le rayonnement monochromatique incident sur le Fabry-Perot à une certaine fréquence est complètement transmis.

9. À quels indices m et n des modes transverses correspondent les figures A et B montrées ci-dessous.

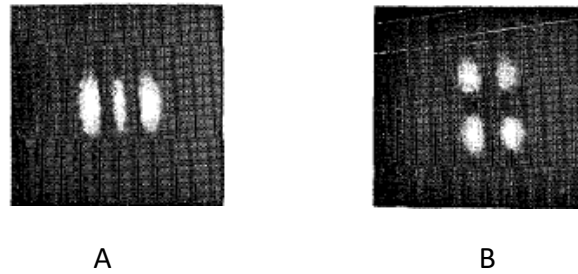


Fig. 7. Empreintes d'intensité de deux modes d'Hermite-Gauss.

10. On focalise faiblement une impulsion femtoseconde de quelques cycles. Le champ électrique maximum au pincement, $z=0$, a l'allure indiquée sur la figure : une cosinusoïde de pulsation ω dans une enveloppe gaussienne. Le faisceau se propage dans le vide vers les z positifs. Tracer l'allure du champ $E(t)$ à $z=z_r$ pour les cas suivants:

- Le faisceau est dans le mode TEM_{01} ;
- Le faisceau est dans le mode TEM_{21} .

Tracer l'allure du champ $E(z')$ à $t=10z_r/c$ pour les cas suivants :

- Le faisceau est dans le mode TEM_{00} ;
- Le faisceau est dans le mode TEM_{11} .

Note: Indiquer l'échelle verticale. Utiliser la même que sur la figure ci-bas.

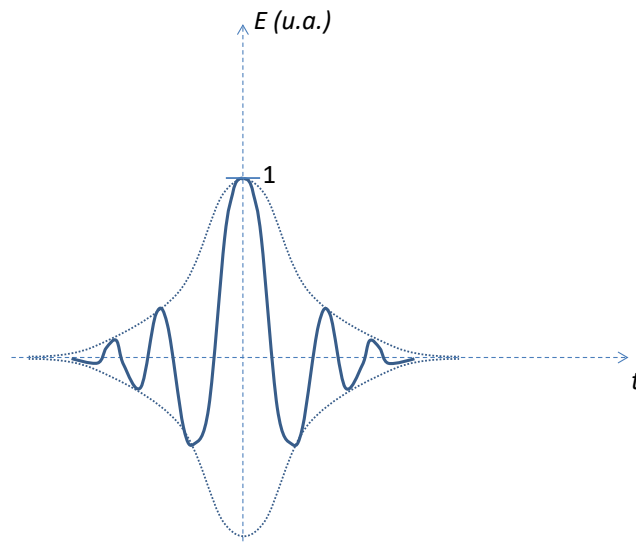


Fig. 8 Allure du champ $E(t)$ au pincement.

11. Soit un laser hélium-néon, dont la longueur L du résonateur fait 15 cm, émettant à une longueur d'onde d'environ $\lambda=632.8$ nm. Quelle est la différence de longueur d'onde entre deux modes longitudinaux consécutifs?

12. Considérer un résonateur quasi-planaire symétrique, tel que sa longueur est très courte par rapport au rayon de courbure des miroirs : $L \ll R_1=R_2=R$.

a) Montrer que les fréquences de résonance sont données par l'expression approchée :

$$\nu_{mnp} \cong \frac{pc}{2L} + \frac{c(m+n+1)}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2LR}}.$$

b) Quel est le degré de dégénérescence (exclure les dégénérescences accidentelles) associé à une fréquence ν_{mnp} ?

c) Comparer l'intervalle spectral entre deux modes transverses consécutifs avec l'intervalle spectral libre si $R=1$ m et $L=1$ mm.

13. Proposer une méthode faisant appel à l'analyse des signaux dans le domaine temporel et permettant de déterminer si un laser émet dans un seul mode ou dans plusieurs modes, transverses ou longitudinaux. Supposer que deux modes distincts n'émettent pas à la même fréquence.

14. Les caractéristiques principales d'un laser hélium-néon sont données dans un tableau à la Fig. 9. Déduire, pour le modèle 155A, les informations suivantes :

a) la longueur du résonateur;

b) le rayon de courbure des deux miroirs en spécifiant lequel correspond au coupleur de sortie.

15. Vous décidez de collimater le faisceau laser modèle 155A analysé au problème (14).

a) Déterminer la distance focale de la lentille que vous choisissez ;

b) Déterminer la longueur de Rayleigh du faisceau laser immédiatement après la lentille.

PRODUCT SPECIFICATIONS

Model	155A ¹²	157	159
Wavelength	632.8 nm	632.8 nm	632.8 nm
Power, TEM ₀₀ (mW)	0.4-0.76	3.0	5.0
Power at Turn-On (mW)	>.35	>2.1	>3.5
Time to Specified Power (Minutes)	<15	<15	<15
Polarization	Random	Random	Random
Longitudinal Mode Spacing (Nominal, MHz)	550	460	460
Beam Diameter @ 1/e ² (mm)	0.9	0.8	0.8
Beam Divergence (Full angle, mrad)	1.0	1.1	1.1
Amplitude Noise, 1 kHz to 100 kHz (RMS)	<0.3%	<0.5%	<0.5%
Amplitude Ripple, 10 Hz to 1 kHz (RMS)	<0.5%	<0.75%	<0.75%
Long-Term Power Drift After Warm-up (12 hours)	<±2.5%	<±2.5%	<±2.5%
Weight - Laser (kg/lb)	1.8/4.0	2.0/4.4	2.0/4.4
Size - Laser (mm)	84 x 88 x 400	84 x 38 x 419	84 x 38 x 419
(Inches)	3.28 x 3.45 x 15.74	3.28 x 3.45 x 16.49	3.28 x 3.45 x 16.49
Power Requirement (watts)	22	20	20
Power Supply	inside laser head	inside laser head	inside laser head
Operating Temperature	-10° to +40°C	0° to -40°C	0° to -40°C
Non-Operating Temperature	-20° to -60°C	-10° to -60°C	-40° to -60°C
Input Voltage	115 vac ±10%, 60 Hz 100/230 vac ±10%, 50-60 Hz *		

Fig. 9 Données d'un fournisseur pour trois lasers hélium-néon.

16. Montrer que le temps de vie caractéristique des photons dans le résonateur avec un coefficient

d'absorption α distribué est donné par :
$$\tau_c = \frac{Ln}{c(\alpha L - \ln(\sqrt{R_1 R_2}))}$$
, où R_i est le coefficient de réflectance

du miroir en intensité, L sa longueur et n l'indice de réfraction. Supposer une décroissance exponentielle de la probabilité de "survie" du photon dans le résonateur telle que $\exp(-t/\tau_c)$ et justifier la forme exponentielle proposer ici.

17. La méthode de spectroscopie en cavité résonnante (*Cavity ringdown*) est utilisée pour déterminer de très faibles valeurs de coefficient d'absorption d'un gaz à une longueur d'onde donnée. On injecte dans un résonateur un faisceau laser dont le mode est ajusté à la fois spatialement et en longueur d'onde pour correspondre à une mode de résonance du résonateur. Ensuite, on coupe subitement la source laser puis on mesure le temps caractéristique de la décroissance de l'intensité laser à la sortie. Finalement, on compare

les temps caractéristiques de décroissance τ_1 et τ_2 pour le résonateur vide (Fig. 10a) et celui avec le gaz à l'étude à l'intérieur (Fig. 10b). Expliquer comment on peut déduire le coefficient d'absorption α du gaz simplement avec les mesures des temps τ_1 et τ_2 . Quels sont les paramètres du résonateur qu'il faut connaître?

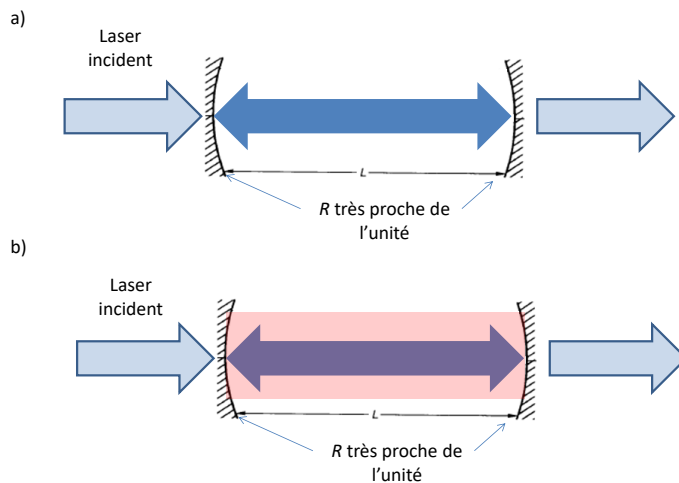


Fig. 10 Illustration de la technique de *Cavity ringdown method* utilisée pour mesurer de très faibles valeurs de coefficient d'absorption d'un gaz à la longueur d'onde d'un laser incident.

18. Au problème précédent, quelle est la largeur spectrale de la réponse du résonateur et quelle forme mathématique prend-elle?

19. Montrer que, si un résonateur remplit les conditions (2,3), alors la condition de l'équation (5) est respectée et donc le mode sera stable.

20. On considère un résonateur confocal symétrique de longueur L .

a) Il existe un faisceau gaussien de longueur d'onde λ dont la forme du front d'onde épouse celle des miroirs du résonateur. Déterminer la valeur de la demi-largeur w_0 et la position du pincement en fonction des paramètres du problème.

b) Calculer la matrice ABCD associée à un aller-retour dans un tel résonateur?

c) En déduire les valeurs de q d'un faisceau gaussien qui se reproduisent dans un aller-retour

d) D'après le critère de stabilité, $\left| \frac{A+D}{2} \right| < 1$, ce résonateur est-il stable?

e) Fournir une justification physique du résultat trouvé à la question d).

21. Orthogonalité des modes.

a. Montrer que les modes d'Hermite-Gauss sont ortho-normaux, i.e., :

$$\iint \text{TEM}_{mn}^*(x, y) \text{TEM}_{m'n'}(x, y) dx dy = \delta_{m,m'} \delta_{n,n'}.$$

b. Si les modes TEM_{mn} forment un ensemble complet de fonctions, alors une fonction complexe de forme arbitraire mais de support borné, $f(x, y)$, peut s'écrire sous la forme :

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} \text{TEM}_{mn}(x, y). \text{ Si tel est le cas, montrer que } c_{mn} = \iint \text{TEM}_{mn}^*(x, y) f(x, y) dx dy.$$

22. Méthode des cercles de Deschamps.

Montrer que la méthode des cercles de Deschamps expliquée dans la réf. [12] permet de retrouver l'équation 6 pour un résonateur conventionnel.

Références et commentaires:

¹ Delsart, "Laser et optique non linéaire", sections 2.4, 2.8 et 2.10.

² Notons que pour un résonateur, la matrice M peut prendre différentes formes dépendamment d'où le cycle commence.

³ Figure tirée de A. E. Siegman, *Lasers*, chapitre 19.

⁴ A. E. Siegman, *Lasers*, chapitre 15.

⁵ Voir Delsart, sections 2.5.3 à 2.5.6 pour plus de détails.

⁶ Il existe aussi une famille de modes qui sont séparables en coordonnées cylindriques, que l'on appelle les modes de Laguerre-Gauss, voir Siegman, *Lasers*, p. 647 pour leur analytique. Ces familles sont des cas particuliers d'une classe plus générale de modes appelés Modes Ince-Gauss. Ces derniers sont décrits à l'aide des coordonnées elliptiques et un paramètre d'ellipticité qui permet de retrouver les familles HG et LG comme cas limites de ce paramètre. Voir l'article M. A. Bandres et J. C. Gutiérrez-Vega, *Opt. Lett.* 29(2), 144-146, 2004.

⁷ Figure tirée de Kogelnik et Li, *Appl. Opt.*, 1966.

⁸ Voir Delsart, sections 2.4.3, 2.4.4, 2.5.4 pour plus de détails.

⁹ En général un miroir multicouche diélectrique introduit un déphasage lors de la réflexion.

¹⁰ Figure tirée de J.-F. Bisson et al., *Appl. Phys. B*, 2006.

¹¹ E. D. Black, *An introduction to Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization*, *Am. J. Phys.* 69, 79-88, 2001.

¹² Delsart, "Laser et optique non linéaire", section 2.2.8.3.