

Chapitre 3

L'optique géométrique et les faisceaux gaussiens

Objectifs spécifiques du chapitre 3:

- 1) *Comprendre l'origine du formalisme matriciel en optique géométrique et pouvoir démontrer les matrices de translation, de réflexion et de réfraction par une lentille mince de focale f ;*
- 2) *Pouvoir établir la matrice de transfert correspondant à une suite d'éléments d'optique dans l'approximation paraxiale;*
- 3) *Comprendre la notion de plan conjugué dans un système imageur; pouvoir établir la forme générale que prend une matrice de transfert reliant deux plans conjugués; pouvoir déterminer la position d'un plan image à un plan objet donné;*
- 4) *Faire le lien entre la théorie exposant la notion de "plan conjugué" et la transformation d'un rayon de courbure d'un front d'onde par un système optique;*
- 5) *Comprendre la notion de rayon de courbure complexe, q , en particulier le sens de ses parties réelle et imaginaire;*
- 6) *Montrer que la propagation dans l'espace réel d'un faisceau gaussien sur une distance L fait passer la valeur du rayon de courbure complexe q à $q + L$;*
- 7) *Montrer qu'à partir de $q(z) = q(z=0) + z$, on peut déduire toutes les formules importantes de propagation d'un faisceau gaussien dans l'espace libre, éq. 26-28;*
- 8) *Comprendre la signification physique du déphasage de Gouy;*
- 9) *Établir la transformation que produit une lentille mince sur q , éq. 32;*
- 10) *Comprendre l'origine de la formule de transformation du rayon de courbure complexe q par un système ABCD et savoir l'utiliser pour une association arbitraire de composants optiques;*
- 11) *Pouvoir calculer la position et la taille du pincement image d'un faisceau gaussien à partir des caractéristiques du faisceau incident et des éléments de matrice ABCD du système imageur.*

Nous allons maintenant délaissier le cas où le champ transverse u subit au cours de sa propagation des pertes par troncature à quelque endroit dans le résonateur et nous intéresser au cas idéal, mais très souvent rencontré, où les seules transformations que le champ complexe subit sont la propagation dans l'espace libre et la réflexion par des miroirs sphériques. Autrement dit, les dimensions des miroirs sont grandes par rapport à celles du faisceau. Nous restons dans le cadre de l'optique paraxiale, c'est-à-dire que la propagation dans l'espace libre s'exprime au moyen de l'intégrale de Huygens-Fresnel (Cf. chapitre 1); la réflexion sur un miroir parabolique s'exprime quant à elle par la multiplication par un terme de phase quadratique (Cf. chapitre 2).

Dans un tel cas, on ne peut pas calculer la structure d'un mode à l'aide de la méthode de Fox et Li [1], c'est-à-dire en propageant le champ transverse sur un très grand nombre d'allers-retours, puisqu'il n'y a pas de différences importantes entre les modules des différents γ_i . En d'autres mots, le filtrage modal, basé sur des pertes différentes entre les différents modes transverses, est quasiment absent.

Cependant, le problème de trouver la solution à l'équation aux valeurs propres de l'opérateur aller-retour dans le résonateur garde tout son sens et sera un des objectifs principaux des deux prochains chapitres. Nous allons voir que diverses familles de solutions analytiques à l'équation (2.6) existent dans ce cas. Mais avant d'attaquer ce problème, il convient de faire une digression dans le domaine de l'optique géométrique; nous allons établir des matrices de transformation des rayons associés à différents composants optiques dans le cadre de l'optique paraxiale; nous verrons que ces outils de calcul seront directement applicables à l'optique ondulatoire pour les faisceaux gaussiens. Nous allons ensuite traiter en détails la propagation des faisceaux gaussiens, qui jouent un rôle très important en physique des lasers puisque les modes des résonateurs stables ont justement cette forme.

3.1 Matrice de transformation des rayons en optique géométrique [2]

Dans cette section, nous présentons la théorie de la transformation des rayons en optique géométrique à l'aide d'un formalisme matriciel. L'optique géométrique est une branche de l'optique, qui

fut historiquement développée avant cette dernière. On peut néanmoins démontrer que les équations qui régissent le tracé des rayons dans un milieu donné s'obtiennent aussi des équations de Maxwell, à la limite où $\lambda \rightarrow 0$ [3]. Autrement dit, elles s'appliquent à un problème dans lequel les dimensions qui interviennent sont beaucoup plus grandes que la longueur d'onde et où l'on peut négliger les phénomènes d'interférence ou de diffraction (ceci survient par exemple lorsque le nombre de Fresnel est élevé). On verra néanmoins que le formalisme matriciel fonctionne parfaitement pour la description de la transformation des faisceaux gaussiens lors de leur propagation dans l'espace libre, leur réfraction par une lentille mince et, en fait, à travers n'importe quel composant de forme parabolique; ceci est en fait la justification principale de présenter le formalisme matriciel de l'optique géométrique dans ce cours.

3.1.1 Matrices de translation et de réflexion

Par simplicité, nous considérons un système optique ayant une symétrie de révolution; nous limitons notre analyse à un rayon méridional, i.e., on ignore les rayons obliques qui ne passent pas par l'axe optique. La position d'un rayon méridional peut alors être définie à l'aide d'un vecteur à deux composantes :

$$\begin{pmatrix} x \\ n_1 \alpha \end{pmatrix}, \quad (1)$$

où le premier élément représente la distance du rayon à l'axe optique et le second est le produit de l'indice de réfraction local, n_1 , par l'angle (en radians!) que fait le rayon avec l'axe optique, tel qu'illustré à la Fig. 1. Dans le cadre de l'optique paraxiale, on peut linéariser les équations qui régissent le passage à travers des surfaces délimitant deux milieux d'indices différents puisque l'angle que fait un rayon avec la normale est très petit. Par exemple, dans le cas particulier d'une surface délimitant deux milieux d'indices n_1 et n_2 , la loi de Snell-Descartes

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad (2)$$

s'écrira dans l'approximation paraxiale:

$$n_1 \alpha_1 \cong n_2 \alpha_2. \quad (3)$$

La linéarité de l'équation (3) permet ensuite l'utilisation d'un formalisme matriciel. On peut en effet représenter la transformation d'un rayon par un système optique quelconque en multipliant le vecteur par une matrice deux par deux :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Le rayon à la sortie du système optique est alors relié à celui à l'entrée de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ n_2 \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ n_1 \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

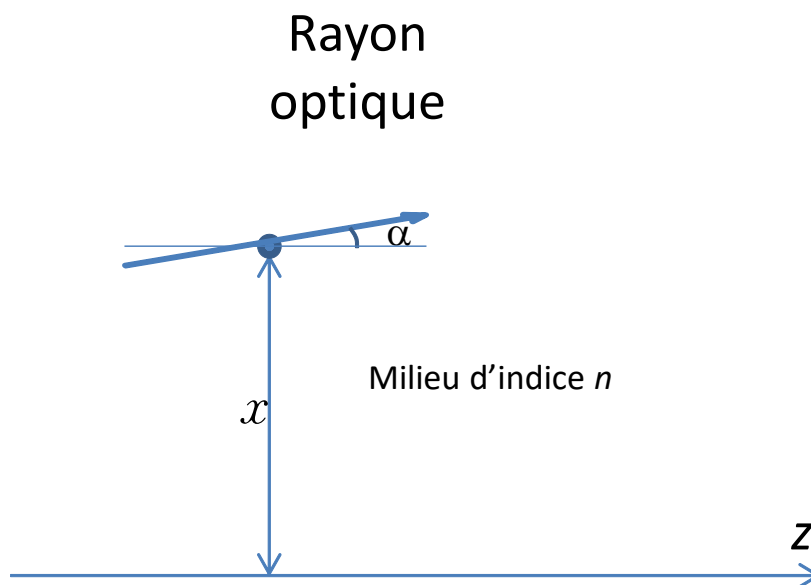


Fig. 1 Un rayon issu du point O dans un milieu d'indice n est décrit par sa distance et de son angle avec l'axe z à l'aide du vecteur : $(x, n_1 \alpha)$. L'axe z est l'axe de symétrie d'un système optique et est aussi la direction moyenne de propagation d'un faisceau.

Dans ce cours, nous allons avoir besoin de deux matrices : la matrice de translation sur une distance $z - z_0 = L$, donnée par :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & L/n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

et la matrice de réflexion par un miroir parabolique de rayon de courbure R_1 :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7a)$$

Notez que cette dernière est identique à la matrice de réfraction par une lentille mince de focale $f=R_1/2$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}. \quad (7b)$$

Une des caractéristiques intéressantes de ce formalisme est que, lorsque nous avons plusieurs éléments en série, comme c'est le cas lorsqu'on calcule l'effet global d'un aller-retour dans un résonateur, la matrice associée s'obtient en faisant le produit des éléments individuels. Dans le cas d'un résonateur à ondes stationnaires tel que décrit dans le chapitre précédent, nous aurions pour un aller-retour, en commençant arbitrairement par une réflexion sur le premier miroir:

$$M = T \times R_2 \times T \times R_1, \quad (8)$$

où R_1 désigne une réflexion sur le premier miroir M_1 , T , une translation sur une distance L , R_2 une réflexion sur le second miroir M_2 , etc. Notez bien que l'ordre des opérations se lit de droite à gauche. Notez aussi que les matrices T et R ont un déterminant égal à l'unité et la matrice issue d'un produit quelconque entre ces matrices aura également un déterminant égal à un [4].

3.1.2 Notion de surfaces conjuguées d'un système imageur.

Considérons maintenant un système optique paraxial composé d'une combinaison arbitraire de lentilles espacées de manière quelconque. Ce système est décrit par une matrice M tel que montré à la Fig. 2. On suppose que la lumière se propage de gauche à droite. Ensuite, considérons deux plans perpendiculaires à l'axe optique P_1 et P_2 situés à des distances respectives L_1 et L_2 devant et derrière ledit système, Fig. 2 [5].

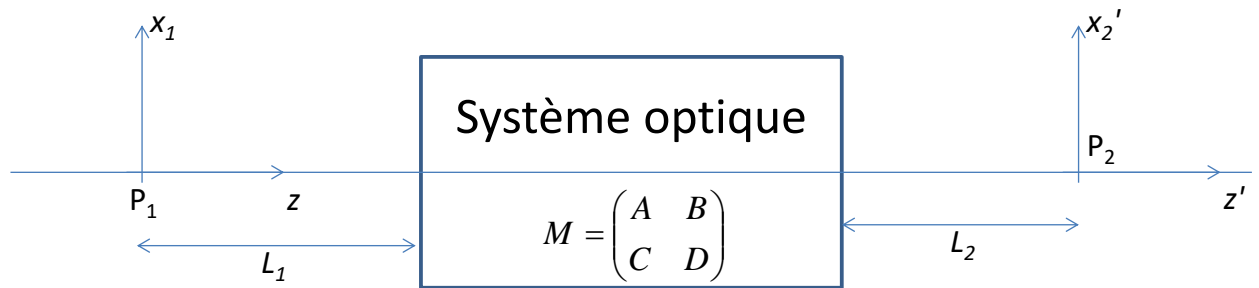


Fig. 2 On considère deux plans P_1 et P_2 placés devant et derrière un système optique sans aberrations décrit par la matrice M .

Alors, la matrice de transformation d'un rayon arbitraire entre ces deux plans sera donnée par:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_2/n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_1/n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

où

$$C_{11} = A + \hat{C}\hat{L}_2, \quad (10a)$$

$$C_{12} = A\hat{L}_1 + B + (\hat{C}\hat{L}_1 + D)\hat{L}_2, \quad (10b)$$

$$C_{21} = C, \quad (10c)$$

$$C_{22} = C\hat{L}_1 + D, \quad (10d)$$

où l'on a défini $\hat{L}_i \equiv L_i/n_i$, $i = 1, 2$. On s'aperçoit que la valeur de $C_{21}=C$ ne dépend pas du choix de L_1 et L_2 : il s'agit donc d'une propriété intrinsèque du système imageur considéré. On appelle $-C=V$, la *vergence du système optique*. Si on combine les équations (5) et (10), on obtient :

$$x_2 = C_{11}x_1 + C_{12}n_1\alpha_1 \quad (11)$$

On définit une paire de plans conjugués par la propriété qu'un faisceau de rayons issus d'un point du plan objet P_1 convergent tous au même point du plan P_2 après le passage par le système imageur M . Les plan P_2 est le plan image du plan objet P_1 . Alors, tous les rayons issus d'un point quelconque x_1 du plan P_1 et qui passent par le système optique devraient tous converger au même point image, x_2 , *quel que soit leur angle α_1* . Alors, on déduit de l'équation (11) qu'une propriété nécessaire de la matrice de transfert entre deux plans conjugués est : $C_{12}=0$.

De l'éq. (11), on en déduit le grandissement transverse, G_t , associé à ces plans conjugués, i.e., $G_t \equiv x_2/x_1 = C_{11}$. Par ailleurs, si l'on définit le grandissement angulaire tel que : $G_a \equiv \alpha_2/\alpha_1|_{x_1=0}$, alors on obtient: $C_{22} = G_a n_2/n_1$. Finalement, du fait que le déterminant d'une matrice de transfert est égal à un, nous avons le résultat suivant [6] :

$$G_t G_a \frac{n_2}{n_1} = 1. \quad (12)$$

L'équation (12) reflète le principe de conservation de l'étendue optique des deux côtés d'un système optique paraxial [7]. Donc, la matrice de transfert entre deux plans de conjugaison du système optique peut s'écrire sous la forme simple:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_t & 0 \\ C & G_t^{-1} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

L'équation (13) est la forme générale de la matrice de transformation entre deux plans conjugués d'un système imageur.

3.1.3 Transformation des rayons de courbure des fronts d'onde par un système imageur parabolique décrit par une matrice ABCD.

Maintenant, pour une position donnée L_1 , on peut calculer la position L_2 du plan conjugué en posant l'équation 10b) égale à zéro puis en isolant L_2 . On obtient:

$$\hat{L}_2 = -\frac{A\hat{L}_1 + B}{C\hat{L}_1 + D} \quad (14)$$

Par ailleurs, pour le grandissement transverse, on obtient :

$$G_t = 1/(C\hat{L}_1 + D) \quad (15)$$

Par exemple, pour une lentille mince dans l'air, on a $C = -V = -\frac{1}{f}$, $A=1$, $B=0$, $D=1$, $n_1=n_2=1$ et

alors: $1/L_1 + 1/L_2 = 1/f$, qui est la formule de conjugaison de lentilles minces en optique géométrique, où L_1 et L_2 sont les distance entre l'objet et la lentille et entre la lentille et le plan image.

Maintenant, le front d'onde géométrique qui part d'un point situé à une distance L_1 du système optique aura un rayon de courbure donné par $R_1=L_1$, alors que le front d'onde géométrique qui émerge du système optique et qui converge en un point sur le plan P_2 aura à la sortie du système optique un rayon $R_2=-L_2$ [8]. Ainsi, on peut établir une formule de transformation de rayon de courbure des fronts d'onde en remplaçant L_1 et L_2 par R_1 et $-R_2$ respectivement dans l'équation (14). On obtient :

$$\hat{R}_2 = \frac{A\hat{R}_1 + B}{C\hat{R}_1 + D}, \quad (16)$$

où $\hat{R}_i \equiv R_i/n_i$. Notez que nous avons démontré l'éq. (16) en partant de deux plans conjugués, mais les valeurs de R_1 et R_2 sont celles à l'entrée et à la sortie immédiates du système optique paraxial décrit par la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Nous allons bientôt voir que l'éq. (16) s'applique également aux faisceaux gaussiens, ce qui est la justification principale de la section 3.1.

3.2 Les faisceaux gaussiens [9].

3.2.1 Définition du rayon de courbure complexe d'un faisceau gaussien

Considérons un faisceau quelconque se propageant librement dans la direction z . Nous avons vu au chapitre 1 que le champ u à toute position z pouvait s'écrire en fonction de celui à la position z_0 au moyen de l'intégrale de Fresnel, qui s'écrit:

$$u(x, y, z = L) = \frac{1}{i\lambda L} \iint u(x_0, y_0, z = 0) \exp\left(ik \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2L}\right) dx_0 dy_0. \quad (1.29)$$

Plus simplement, en une dimension, on peut écrire :

$$u(x, z = L) = \sqrt{\frac{1}{i\lambda L}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_0, z = 0) \exp\left(ik \frac{(x-x_0)^2}{2L}\right) dx_0, \quad (\text{en une dimension}) \quad (17)$$

Il s'agit d'un produit de convolution de la distribution initiale dans le plan $z=0$ avec une gaussienne ayant un argument imaginaire. Or, on peut montrer qu'un produit de convolution d'une fonction gaussienne avec une autre fonction gaussienne conserve la même forme gaussienne. Ceci implique donc qu'une distribution gaussienne en $z=0$ demeurera gaussienne au cours de sa propagation en n'importe quel autre plan z .

Soit la forme gaussienne suivante d'amplitude unité pour le champ $u(x, z = 0)$ en $z=0$:

$$u(x, z=0) = \exp\left(\frac{ikx^2}{2R} - \frac{x^2}{w^2}\right), \quad (18)$$

où A est une constante arbitraire. Le premier terme de l'argument de l'exponentielle décrit la courbure du front d'onde de rayon R , alors que le second décrit le profil gaussien de l'amplitude de l'onde avec une demi-largeur en $1/e$ de w . L'éq. (18) peut aussi s'écrire sous la forme:

$$u(x, z=0) = A \exp\left(\frac{ikx^2}{2q}\right), \quad (19)$$

avec:

$$\frac{1}{q(z)} \equiv \frac{1}{R(z)} + \frac{i\lambda}{\pi w(z)^2}. \quad (20)$$

Le paramètre q s'appelle le rayon de courbure complexe de l'onde. En remplaçant (19) dans (17), et en supposant que $A=1$, on trouve:

$$u(x, z=L) = \sqrt{\frac{1}{i\lambda L}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{ikx_0^2}{2q(z=0)}\right) \exp\left(ik \frac{(x-x_0)^2}{2L}\right) dx_0, \quad (21)$$

qui est une intégrale de la forme :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax_0^2 - 2bx_0) dx_0 = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{a}\right). \quad (22)$$

En comparant (21) et (22), on trouve en une dimension:

$$u(x, z=L) = \sqrt{\frac{1}{1+L/q(z=0)}} \exp\left(\frac{ikx^2}{2(q(z=0)+L)}\right). \quad (23)$$

On peut facilement faire un raisonnement similaire en deux dimensions; on obtient :

$$u(x, y, z = L) = \frac{1}{1 + L/q(z=0)} \exp\left(\frac{ik(x^2 + y^2)}{2(q(z=0) + L)}\right). \quad (24)$$

Ainsi, un faisceau gaussien qui se propage sur une distance L demeure gaussien et son rayon de courbure complexe passe de q à $q+L$. Le facteur devant l'exponentielle reflète le fait que l'amplitude de l'onde doit

changer avec z pour que la norme de u , définie comme $\int_{-\infty}^{\infty} u^* u \, dx dy$, soit conservée en vertu de la

conservation de l'énergie. On verra que la forme complexe de q introduit aussi un déphasage additionnel, Cf. éq. 28.

3.2.2 Propagation d'un faisceau gaussien dans l'espace libre

À partir de l'éq. (23), nous trouvons la relation suivante:

$$q(z) = q(z=0) + z. \quad (25)$$

Cette expression est la même que celle décrivant l'évolution en fonction de la distance d'un point source du rayon de courbure d'un front d'onde géométrique, Cf. 3.1.3. Dans un milieu d'indice n , l'éq. (25) demeure valide; notez cependant que $\lambda = \lambda_0/n$ dans l'éq. (20), où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide.

À partir des éqs. (20) et (25), on peut déduire l'évolution générale de la taille w du faisceau (demi-largeur à $1/e$ du maximum), du rayon de courbure, R , du front d'onde et du déphasage relatif à une onde plane en fonction de la distance de propagation z . On obtient:

$$w(z)^2 = w_0^2 \left(1 + z^2/z_r^2\right). \quad (26)$$

où w_0 est le rayon du faisceau au pincement. L'expression pour le rayon de courbure du faisceau en fonction de z s'écrit :

$$R(z) = z^{-1} \left(z_r^2 + z^2 \right). \quad (27)$$

Dans les équations (26-27), $z=0$ est pris à la position du pincement du faisceau. Il existe finalement un déphasage additionnel de l'onde par rapport à l'onde plane, qui s'écrit comme suit:

$$\psi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_r}\right), \quad (28)$$

où

$$z_r = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (29)$$

Ce déphasage s'appelle le déphasage de Gouy. Le paramètre z_r s'appelle la longueur de Rayleigh. Celle-ci correspond à la distance z_r au pincement du faisceau où la demi-largeur du faisceau w est multipliée par $\sqrt{2}$, i.e. devient égal à $w(z = z_r) = \sqrt{2}w_0$. La signification physique du déphasage de Gouy est illustrée à la Fig. 3. On peut voir que le front d'onde gaussien acquiert *une avance spatiale* d'une demi-longueur d'onde par rapport à une onde plane idéale. Une expérience mettant en évidence ce déphasage est suggérée à la Fig.

4. On peut montrer que :
$$u(x, y, z) = \left(\frac{w_0}{w(z)} \right) \exp\left(\frac{ik(x^2 + y^2)}{2(z - iz_r)} - i\psi(z) \right).$$

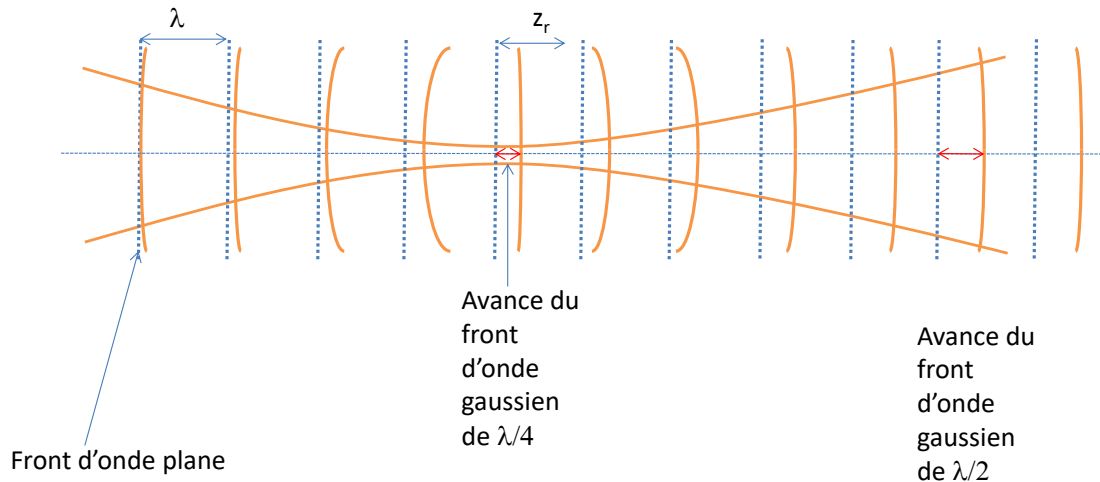


Fig. 3. Illustration de l'avance graduelle que prend le front d'onde du faisceau gaussien focalisé par rapport à une onde plane à la même longueur d'onde. L'avance totale est de π radian (ou une demie longueur d'onde) sur un déplacement allant de $-z$ à z tel que $z \gg z_r$.

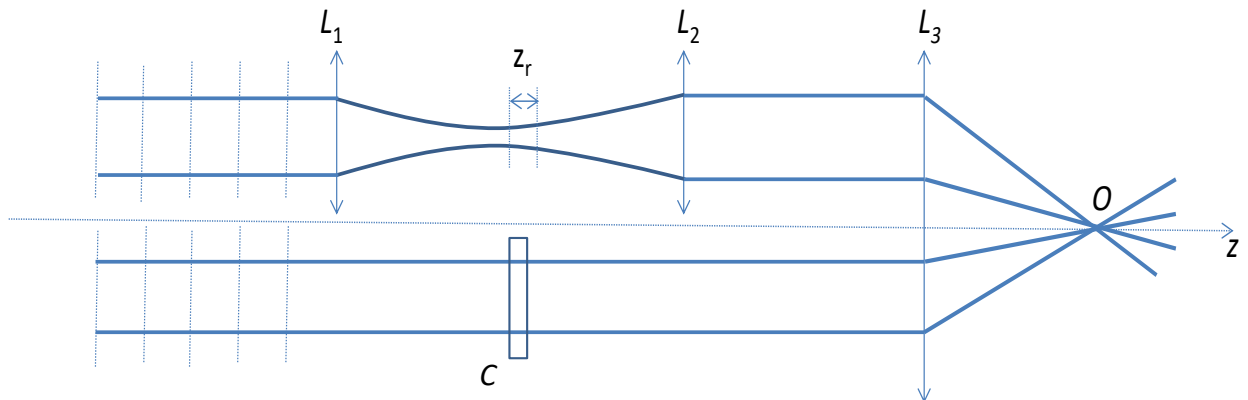


Fig. 4 Expérience destinée à démontrer le déphasage de Gouy dans un faisceau gaussien. On fait interférer sur l'axe z deux faisceaux gaussiens identiques, mutuellement cohérents et en phase avec une lentille mince L_3 . Le faisceau du haut est focalisé puis collimaté avec deux lentilles mince identiques L_1 et L_2 . On suppose que les deux faisceaux sont initialement en phase et que la longueur optique des deux chemins est la même; en particulier, le déphasage supplémentaire accumulé dans les lentilles L_1 et L_2 est compensé dans l'autre bras de l'interféromètre par une lame à retard C . La distance entre les deux lentilles L_1 et L_2 étant grande par rapport à la longueur de Rayleigh du faisceau focalisé par L_1 , l'effet de la présence des deux lentilles L_1 et L_2 est d'introduire un déphasage d'environ π , créant alors une condition d'interférence destructive, i.e., un point sombre sur l'axe optique au point O .

La raison physique d'une vitesse de phase d'un faisceau gaussien supérieure à c s'explique facilement lorsqu'on considère le fait qu'un faisceau gaussien est constitué d'une superposition d'ondes

planes plus ou moins inclinées par rapport à l'axe de propagation z . Considérons une telle onde inclinée d'un angle θ , Fig. 5. Un observateur qui regarderait l'évolution de la phase d'une telle onde au voisinage de l'axe z verrait une période apparente de $\lambda/\cos(\theta)$ et mesurerait une crête de champ à un intervalle de temps $t=\lambda/c$, de sorte que la vitesse de phase perçue serait $v_{ph}=c/\cos(\theta)$.

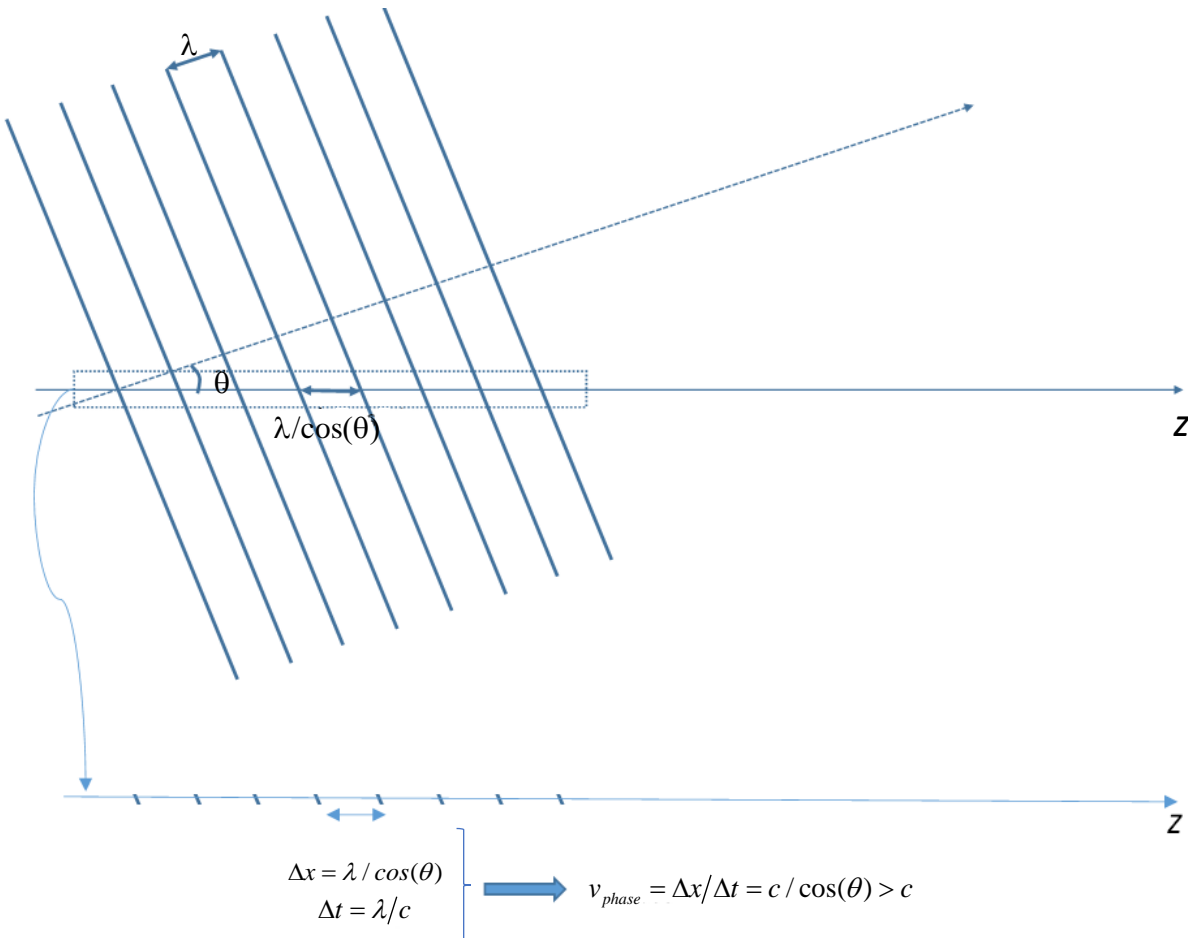


Fig. 5. Illustration de la propagation d'une onde plane inclinée d'un angle θ par rapport à l'axe z . Un faisceau gaussien est constitué d'une superposition d'ondes planes inclinées par rapport à l'axe de propagation moyen du faisceau. Chacune de ces ondes planes se propage dans le vide à la vitesse de la lumière, c . En bas : pour un observateur qui regarde l'évolution de la phase d'une telle onde au voisinage de l'axe z , l'onde présente une période apparente de $\lambda/\cos(\theta)$ et mesure une crête de champ à un intervalle $\Delta t=\lambda/c$, de sorte que la vitesse de phase perçue est $v_{ph}=c/\cos(\theta) > c$.

3.2.3 Transformation du rayon de courbure complexe q par une lentille mince.

Nous avons vu au chapitre 2 que l'effet d'une lentille mince de focale f sur un faisceau quelconque équivalait à multiplier le champ complexe u par :

$$\exp\left(-\frac{i\pi x^2}{f\lambda}\right) \equiv \exp\left(-\frac{ikx^2}{2f}\right). \quad (30)$$

Partant de l'éq. (19), on trouve :

$$\exp\left(\frac{ikx^2}{2q_2}\right) = \exp\left(\frac{ikx^2}{2q_1}\right) \times \exp\left(-\frac{ikx^2}{2f}\right), \quad (31)$$

où q_1 et q_2 sont les rayons de courbure complexes avant et après la réfraction par la lentille mince.

On identifie :

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f}, \quad (32)$$

qui est identique à l'équation 2.2 pour les rayons de courbure de fronts d'onde géométrique. On peut facilement montrer que, pour des milieux d'indices différents n_1 et n_2 avant et après la lentille respectivement, l'équation (32) devient :

$$\frac{n_2}{q_2} = \frac{n_1}{q_1} - \frac{1}{f} \quad (33)$$

3.2.4 Formule générale de transformation du rayon de courbure complexe par un système ABCD.

Dans les deux cas traités jusqu'ici (i.e., la translation et la réfraction/réflexion), le résultat est identique à celui des fronts d'onde géométriques. On s'attend donc à ce que l'expression (16), qui s'applique pour un système optique arbitraire constitué d'une succession de translations dans l'espace libre et de

transmission à travers des lentilles minces, s'applique aussi pour des faisceaux gaussiens en faisant simplement le remplacement $R \rightarrow q$. On obtient alors:

$$\hat{q}_2 = \frac{A\hat{q}_1 + B}{C\hat{q}_1 + D}, \quad (34)$$

où $\hat{q}_i \equiv q_i/n_i$. La formule (34) donne le rayon de courbure complexe q_2 à la sortie d'un système optique paraxial d'un faisceau gaussien connaissant le rayon de courbure complexe q_1 à l'entrée de ce système optique, la matrice ABCD associée à ce dernier et les indices n_1 et n_2 des milieux incident et émergent. Un faisceau gaussien conserve sa forme gaussienne après le passage par un système ABCD. On dit que le faisceau gaussien est une solution auto-similaire de la propagation dans un système paraxial puisque la forme générale d'un tel faisceau demeure gaussienne à n'importe quel endroit au cours de sa propagation. Par contre, le faisceau n'est pas invariant puisque sa demi-largeur w et son rayon de courbure, R , changent au cours de sa propagation.

3.2.5 Condition de conjugaison en optique géométrique versus conjugaison des faisceaux gaussiens pour une lentille mince.

Connaissant la position, la taille au pincement et la longueur d'onde d'un faisceau gaussien incident sur un système optique décrit par une matrice ABCD, il est possible de calculer la taille et la position au pincement du faisceau émergent de ce système optique en utilisant les résultats établis aux sections 3.2.2, 3.2.3 et 3.2.4. Il serait cependant incorrect de penser que la position et la taille au pincement s'obtiennent avec les formules de conjugaison tirées de l'optique géométrique. Parfois l'erreur peut être considérable. Prenez par exemple un faisceau gaussien dont le pincement se situe au foyer objet d'une lentille mince. On demande de calculer la position et la taille du pincement du faisceau gaussien imagé par la lentille. D'après les lois de l'optique géométrique, l'image du pincement serait située à l'infini et le grandissement transverse

serait aussi infini. Mais ce résultat est erroné dans le cas d'un faisceau gaussien. En effet, dans le cadre de l'optique des faisceaux gaussiens, le pincement est au foyer image de la lentille et le grandissement, défini par le rapport entre la largeur au pincement du faisceau émergent à celle du faisceau incident, est égal à f/z_{r1} où z_{r1} est la longueur de Rayleigh du côté objet. Le fait que le pincement image d'un faisceau gaussien n'est pas nécessairement dans le plan image conjugué est représenté à la Fig. 6.

À partir des résultats exposés à la section précédente, Kogelnik [10], puis Self [11] ont développé des formules de conjugaison des pincements pour un faisceau gaussien se propageant dans le vide et passant à travers une lentille mince de focale f . Le résultat est le suivant:

$$\frac{1}{L_1 + \frac{z_{r1}^2}{L_1 - f}} + \frac{1}{L_2'} = \frac{1}{f}, \quad (35)$$

où L_1 est la distance du pincement objet de l'entrée du système optique paraxial, alors que L_2' est la distance du pincement image à la sortie du système optique. Le rapport des rayons au pincement est donné par :

$$\frac{w_{02}}{w_{01}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{L_1}{f}\right)^2 + \left(\frac{z_{r1}}{f}\right)^2}} \quad (36)$$

Il faut remarquer que ces formules deviennent identiques à celles de l'optique géométrique dans le cas où la longueur de Rayleigh dans l'espace objet, z_{r1} , est petite devant f . Les équations (35-36) sont tracées aux Fig. 7 et 8. Dans le cas d'un système optique paraxial arbitraire, la formule de conjugaison devient [12]:

$$\hat{L}_2' = -\frac{AC\hat{z}_{r1}^2 + (A\hat{L}_1 + B)(C\hat{L}_1 + D)}{C^2\hat{z}_{r1}^2 + (C\hat{L}_1 + D)^2}, \quad (37)$$

et le grandissement, défini comme $G_t \equiv w_{02}/w_{01}$ est donné par :

$$G_t^2 = 1 / \left(C^2 \hat{z}_{r1}^2 + (C\hat{L}_1 + D)^2 \right) \tag{38}$$

Notez que les éqs. (37-38) deviennent identiques aux éqs. (14-15) pour un système afocal, i.e., $C=0$, où lorsque la longueur de Rayleigh tend vers zéro. De plus, les éqs. (35-36) sont des cas particuliers des éqs. (37-38), qui sont plus générales.

Ce qui est le plus intéressant avec les formules (37-38), c'est qu'elles sont valide en général pour n'importe quel faisceau réel de *distribution arbitraire*, $u(x,y)$, c'est-à-dire même les faisceaux non-gaussiens [12]. Dans ce cas, la largeur du faisceau, W , est définie comme étant égal à deux fois l'écart-type de la distribution d'intensité, c.-à-d. pour une direction x :

$$W_x = 2 \sqrt{\frac{\int x^2 u^*(x,y)u(x,y) dx dy}{\int u^*(x,y)u(x,y) dx dy}} \tag{39}$$

et z_{r1} a la même définition que pour un faisceau gaussien, i.e., la distance à partir du pincement où la largeur du faisceau est multipliée par $\sqrt{2}$. De même, la formule (26) s'applique pour un faisceau quelconque. La formule (27) s'applique en interprétant le rayon de courbure R comme le rayon de courbure effectif du faisceau.

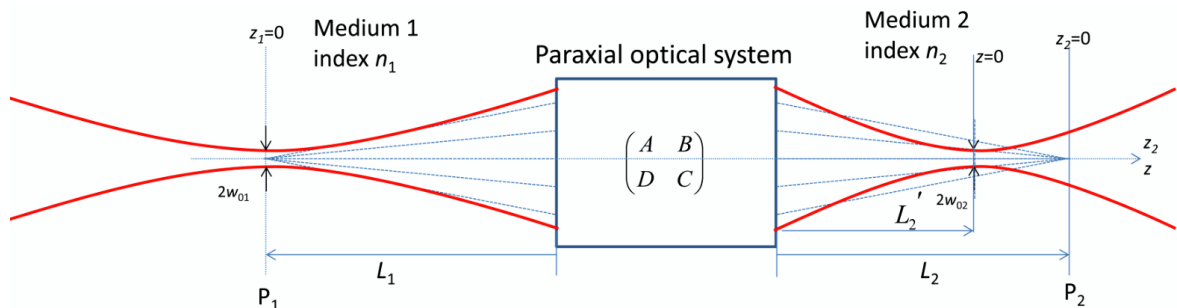


Fig. 6 Transformation d'un faisceau gaussien par un système paraxial parabolique décrit par une matrice ABCD. Les plans P_1 et P_2 sont des plans conjugués; les rayons issus d'un point dans le plan P_1 convergent tous au même point dans le plan P_2 (pointillés). Le pincement du côté image d'un faisceau gaussien dont le pincement est situé dans le plan objet P_1 est décalée par rapport à au plan image conjugué.

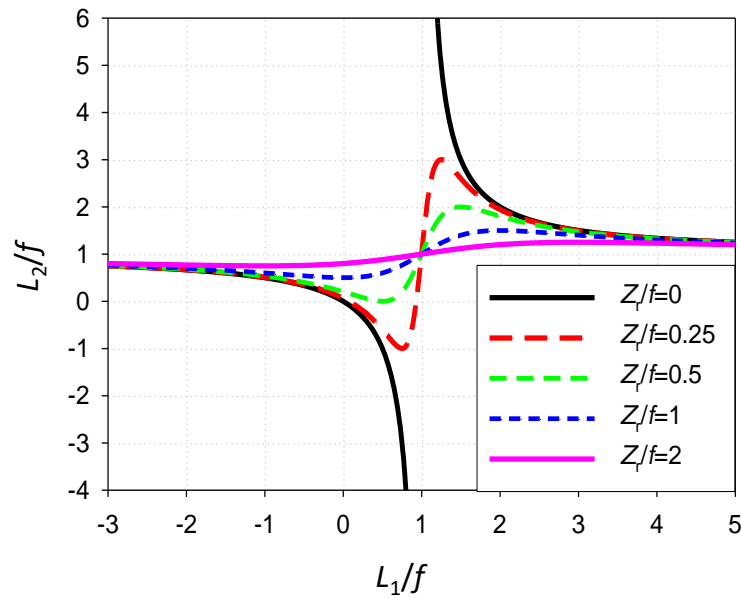


Fig. 7 Position du pincement d'un faisceau gaussien transformé par une lentille mince de focale f pour différentes valeurs du rapport z_r/f . Lorsque ce rapport vaut zéro, on retrouve le résultat propre à l'optique géométrique (en traits pleins). L'éq. (34), cas particulier de l'éq. (36) en utilisant l'équation 7b), a été utilisée.

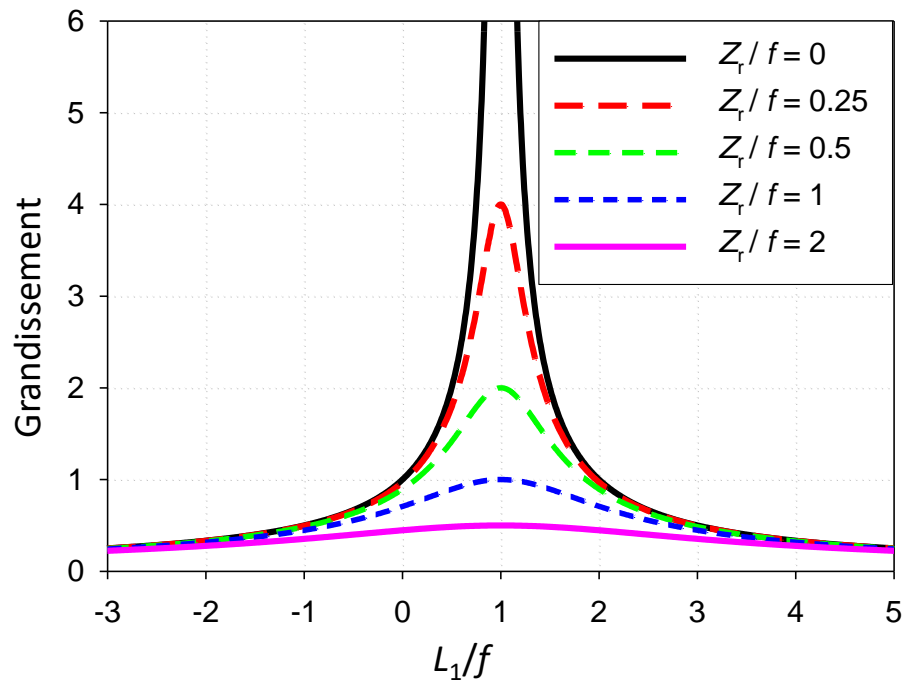


Fig. 8 Rapport des tailles des faisceaux w_02/w_01 au pincement pour différentes valeurs du rapport z_r/f . Lorsque ce rapport vaut zéro, on retrouve le résultat propre à l'optique géométrique. L'éq. (35), cas particulier de l'éq. (37) en utilisant l'équation 7b), a été utilisée.

3.3 Conclusions

En résumé, l'optique géométrique utilisée dans le cadre de l'optique paraxiale permet l'utilisation d'un formalisme matriciel pour calculer la propagation de rayons à travers un système optique constitué exclusivement de dioptries sphériques. Nous avons défini la notion de plans conjugués qui sont des plans objet et image l'un de l'autre. La matrice de transfert associée à deux plans conjugués a une forme particulière qui permet de calculer la distance \hat{L}_2 d'un plan image, connaissant celle, \hat{L}_1 , d'un plan objet (éq. 14). L'identification des distances $\hat{L}_1 = \hat{R}_1$ et $\hat{L}_2 = -\hat{R}_2$ aux rayons de courbure des fronts d'onde à l'entrée et à la sortie du système optique nous permet de calculer la transformation d'un rayon de courbure par le système optique décrit par la matrice ABCD:

$$\hat{R}_2 = \frac{A\hat{R}_1 + B}{C\hat{R}_1 + D}. \quad (16)$$

Ensuite, nous avons montré qu'un faisceau gaussien pouvait être écrit sous la forme :

$$u(x, z = 0) = A \exp\left(\frac{ikx^2}{2q}\right), \quad (19)$$

où q est le rayon de courbure complexe

$$\frac{1}{q} \equiv \frac{1}{R} + \frac{i\lambda}{\pi w^2}. \quad (20)$$

Le faisceau gaussien garde sa forme gaussienne lorsqu'il se propage dans un système optique décrit par une matrice ABCD. De plus, les lois de transformation du paramètre q sont exactement les mêmes que celles utilisées pour calculer le rayon de courbure R en optique géométrique, si bien que nous pouvons utiliser la même loi de transformation qu'en optique géométrique :

$$\hat{q}_2 = \frac{A\hat{q}_1 + B}{C\hat{q}_1 + D}. \quad (34)$$

Questions et problèmes

1. Vérifier que les expressions des matrices T et R , (6) et (7) décrivent correctement la transformation d'un rayon lors qu'une propagation sur une distance L ou la réflexion sur une surface sphérique de rayon de courbure R .
2. Calcul de la matrice de transfert d'une lentille épaisse.
 - a. Déterminer la matrice de transfert associée à la transmission à travers un dioptre de rayon de courbure R_1 séparant un milieu d'indice n_1 et un milieu d'indice n_2 quelconque. Indice : utiliser la loi de la réfraction de Snell-Descartes dans l'approximation paraxiale.
 - b. En déduire la matrice de transfert pour une lentille épaisse d'indice n_2 dont les interfaces ont un rayon R_1 et R_2 séparées d'une distance e .
 - c. Que devient cette matrice de transfert lorsque l'épaisseur de la lentille tend vers zéro? En déduire la distance focale de ce composant en fonction des paramètres du problème.
3. Vérifier que le produit matriciel de l'équation (9) mène aux équations (10a,b,c,d).
4. Vérifier en faisant le calcul complet que l'équation de Fresnel appliquée à l'équation (19) mène aux équations (23-24).
5. À partir des équations 24 et 25 et de la définition de ce paramètre q (éq. 20), démontrer les équations 26, 27 et 28. Ces équations décrivent les paramètres d'un faisceau gaussien se propageant librement dans l'espace.
6. Trouver une expression pour la divergence angulaire, θ , du faisceau en champ lointain en fonction des paramètres w_0 et λ du faisceau gaussien.
7. Pour un faisceau arbitraire de rayon au pincement et de divergence W_0 et Θ respectivement, on peut définir le facteur M^2 comme : $M^2 = \frac{\pi}{\lambda} W_0 \Theta$. Que vaut M^2 pour un faisceau gaussien? On peut montrer que le facteur M^2 prend sa valeur minimale pour un faisceau gaussien. Qu'indique la valeur d'un tel paramètre?

8. Montrer que l'équation (34) est compatible avec le produit matriciel, c.-à-d. que si vous avez un système optique constitué de deux sous-systèmes 1 et 2, tels que :

$$\text{Si } \frac{q_2}{n_2} = \frac{A_1 \frac{q_1}{n_1} + B_1}{C_1 \frac{q_1}{n_1} + D_1} \text{ et } \frac{q_3}{n_3} = \frac{A_2 \frac{q_2}{n_2} + B_2}{C_2 \frac{q_2}{n_2} + D_2}, \text{ alors } \frac{q_3}{n_3} = \frac{A \frac{q_1}{n_1} + B}{C \frac{q_1}{n_1} + D} \text{ où: } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}. \text{ Ce}$$

résultat est d'une grande importance parce qu'il montre que le formalisme matriciel peut être employé pour décrire la propagation de faisceaux gaussiens.

9. L'intégrale de Collins [13]. Un système paraxial parabolique décrit par une matrice ABCD transforme un champ u de la façon suivante :

$$u_{\text{sortant}}(x, y) = \frac{1}{iB\lambda} \iint_{x', y'} u_{\text{entrant}}(x', y') \exp \frac{ik(Ax'^2 + Dx^2 - 2xx' + Ay'^2 + Dy^2 - 2yy')}{2B} dx' dy'$$

- Montrer que cette formule est compatible avec celle de Huygens-Fresnel, établie pour la propagation libre sur une distance L
 - Montrer que cette formule est compatible avec celle associée au passage par une lentille mince
10. Considérer le produit BPP (*Beam Product Parameter*) défini par : $BPP = \theta \times w_0$ d'un faisceau Gaussien traversant un système optique paraxial. Qu'arrive-t-il à la valeur de ce produit après le passage dans un système optique paraxial réel? Supposer que le faisceau demeure gaussien après son passage par un tel système.
11. Vous focalisez un faisceau gaussien avec une lentille qui n'introduit aucune distorsion du front d'onde. Si vous focalisez le faisceau à l'intérieur d'un bloc de silice, d'indice $n=1.5$, le faisceau sera-t-il plus petit ou plus grand au pincement que si vous le focalisez dans l'air libre? Justifiez votre réponse par un calcul approprié.

12. Montrer que le faisceau gaussien dont le pincement de largeur w_{01} est placé au foyer objet d'une lentille mince produit un pincement w_{02} au foyer image et que le rapport $\frac{w_{02}}{w_{01}}$ est donnée par

$$\frac{w_{02}}{w_{01}} = \frac{f}{z_{r1}}.$$

13. On focalise faiblement une impulsion femtoseconde dans le mode gaussien TEM_{00} de quelques cycles dans le vide. Le faisceau gaussien se propage vers les z positifs. Le champ électrique maximum au pincement, $z=0$, montré en fonction du temps, a l'allure indiquée sur la figure : une cosinusoïde de pulsation ω dans une enveloppe gaussienne.

- Tracer l'allure du champ $E(t)$ à $z=z_r$
- Tracer l'allure du champ $E(z')$ à $t=10z_r/c$

Note: Indiquer l'échelle verticale. Utiliser la même que sur la figure ci-dessous.

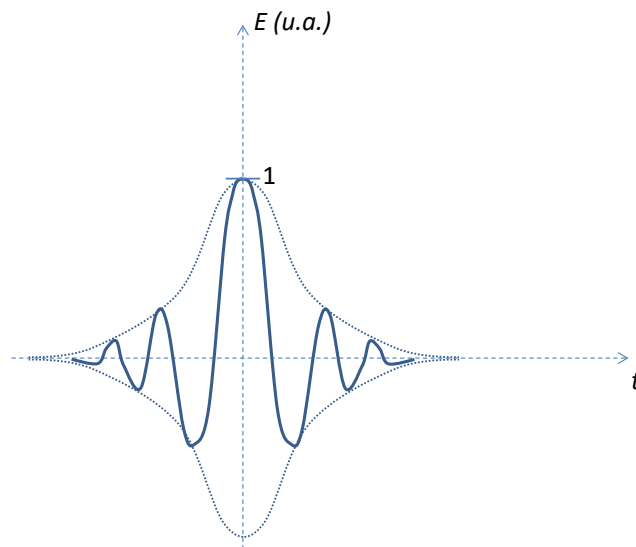


Fig. 8 Allure du champ $E(t)$ au pincement.

14. Le déphasage de Gouy produit une vitesse de phase au voisinage du pincement qui est supérieur à c .

- a. Établir l'expression de la vitesse de phase au pincement en fonction des variables pertinentes du problème et montrer que celle-ci est supérieure à c .

Considérer un faisceau d'ondes planes à symétrie de révolution dont l'angle du vecteur \vec{k} avec la direction z est θ .

- b. Montrer que l'angle θ des ondes planes qui donne la même vitesse de phase que le faisceau gaussien correspond à la divergence angulaire de ce dernier.

Références et commentaires:

¹ A. G. Fox et T. Li, "Resonant modes in a maser interferometer", *Bel Sys. Tech. J.* **40**, 453-488, 1961.

² Pour plus de détails, voir Siegman, sections 15.1 à 15.3, Delsart, *Lasers et optique nonlinéaire*, sections 2.2.1 à 2.2.6.

³ Voir M. Born et Emil Wolf, *Principles of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, 7ème éd. Cambridge University Press, 1999, chapitre 1.

⁴ Cette propriété provient du principe de conservation du volume dans l'espace des phases appliquée à la propagation de rayons lumineux à travers un système optique paraxial. En mécanique classique, ce principe est connu sous le nom de théorème de Liouville. Pour plus de détails, voir H. Goldstein, C. Poole, et J. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd Ed. (Addison-Wesley, San Francisco, 2002).

⁵ Dans le formalisme matriciel, il peut arriver qu'on ait un objet virtuel et que celui-ci soit placé derrière le système imageur, i.e., que le prolongement des rayons incidents sur le système imageur convergent en un point derrière celui-ci. Dans ce cas L_1 est négatif. On peut aussi avoir une image virtuelle dont le prolongement des rayons issus du système imageur soit placé avant ce dernier. Dans ce cas, L_2 est négatif. Le point important est que, pour une propagation de gauche à droite, L_1 est positif si l'objet est situé à gauche du système optique et négatif dans le cas contraire; de même, L_2 est positif si l'objet est situé à droite du système optique et négatif dans le cas contraire.

⁶ L'équation (12) joue un rôle important en optique parce qu'elle manifeste la conservation de l'étendue optique d'un faisceau; en bref, le produit de la taille par l'angle d'ouverture d'un objet ou bien le produit de la taille d'un faisceau au pincement par sa divergence en champ lointain se conservent dans l'espace image, à un facteur n_2/n_1 près.

⁷ L'étendue d'une source est définie comme le produit de la surface émettrice de ladite source par l'angle solide vers lequel elle émet.

⁸ Rappelons qu'un faisceau divergent de rayons incident sur un système optique correspond, par convention, à un rayon de courbure positif du front d'onde géométrique et un faisceau convergent correspond à un rayon de courbure négatif.

⁹ Voir Siegman, section 16.3, p.637-642, section 17.1, p. 663-669, et Delsart section 2.3).

¹⁰ H. Kogelnik et T. Li, " Laser beams and resonators", *Appl. Opt.* **5(10)**, 1550-1567, 1966.

¹¹ S. A. Self, "Focusing of spherical Gaussian beams", *Appl. Opt.* **22(5)**, 658-661, 1983.

¹² J.-F. Bisson, "On the connection between image formation formulas in geometrical optics and beam transformation formulas in wave optics", *Am. J. Phys.*, **81(10)**, 844-853, 2013.

¹³ S. A. Collins, "Diffraction integral written in terms of matrix optics", *J. Opt. Soc. Amer.* **60 (9)**, 1168, 1970.