

## Chapitre 10

### Les couplages entre les photons et les centres luminescents dans un résonateur [1]

*Objectifs spécifiques :*

- 1) *Pouvoir établir les équations différentielles régissant l'évolution des populations des niveaux d'énergie d'un système à quatre niveaux;*
- 2) *connaître les deux hypothèses qui rendent un système à quatre niveaux idéal;*
- 3) *pouvoir établir l'expression de la population du niveau excité  $N_2$  en régime stationnaire;*
- 4) *pouvoir établir la relation entre le flux de photons et l'intensité  $I_s$  d'une onde;*
- 5) *pouvoir établir l'équation différentielle régissant l'évolution du nombre de photons dans un résonateur en fonction du temps;*
- 6) *pouvoir interpréter correctement le coefficient  $\beta$  défini à la section 10.4;*
- 7) *pouvoir résoudre en régime stationnaire le système couplé d'équations (20-21) régissant les populations de l'état excité  $N_2$  et le nombre de photons;*
- 8) *comprendre la notion de seuil d'oscillation et l'interpréter en termes de changement dans l'évolution du nombre de photons et de la population de l'état excité.*

Dans les quatre premiers chapitres, nous avons étudié les résonateurs vides. Par la suite, dans les cinq chapitres qui ont suivi, nous avons étudié les propriétés des milieux luminescents, qui sont des milieux qui peuvent se désexciter en émettant un ou des photons. Dans les trois prochains chapitres, nous allons considérer un système constitué d'un milieu luminescent placé à l'intérieur d'un résonateur. Nous allons supposer que ce milieu peut être placé dans un état hors de l'équilibre thermodynamique grâce à un processus de pompage produisant une inversion de population, c'est-à-dire une population plus grande dans un niveau excité que dans un autre niveau d'énergie plus basse, vers lequel l'atome se désexcite. Dans ce cas, nous allons voir qu'il est alors possible d'obtenir un coefficient d'absorption négatif, que l'on appelle le gain. S'il est suffisamment élevé, ce gain pourra éventuellement compenser les pertes de photons dans le résonateur et ainsi donner lieu à l'oscillation laser. L'absorption ou l'émission de photons s'accompagne d'un changement dans les populations des différents niveaux électroniques de l'atome. Le couplage entre les populations de photons et celle des niveaux d'énergie va dicter la dynamique de l'émission laser.

Dans un premier temps, nous allons décrire les équations d'évolution d'un système atomique idéal à quatre niveaux. Ceci nous permettra d'établir la manière dont les photons affectent les populations dans l'état excité, et du même coup, comment ils affectent le coefficient de gain [2]. Dans un second temps, nous allons établir l'équation qui régit le nombre de photons dans un résonateur en fonction de la population du niveau excité, des propriétés spectroscopiques de ce dernier et du temps de vie des photons dans le résonateur. Ensuite, nous allons résoudre simultanément les équations pour les populations et les photons afin d'obtenir des solutions en régime stationnaire, ce qui nous permettra d'établir la notion de seuil d'oscillation laser, puis de déterminer l'évolution de la population du niveau excité et le nombre de photons en fonction du taux de pompage.

### 10.1 Équation d'évolution du niveau excité pour un système à quatre niveaux idéal.

Nous avons vu au chapitre 6 que les équations de débit résolues pour un système à deux niveaux montrent qu'un tel système ne peut pas, par un mécanisme de pompage, être placé dans un état d'inversion de population, c'est-à-dire un état pour lequel la population de l'état excité est supérieure à celle de l'état fondamental. Ceci est dû à ce que les effets de décohérence dus à l'interaction de l'atome avec son milieu empêchent l'atome de se placer dans une superposition cohérente de deux états. Une telle inversion dans un système à deux niveaux pourrait avoir lieu si le temps de décohérence, que l'on a appelé  $T$  au chapitre précédent, était long par rapport à l'échelle de temps requise pour peupler le niveau excité [3]; cela a été démontré pour des atomes interagissant faiblement avec leur environnement en interaction avec un champ ultra-intense provenant d'un laser délivrant des impulsions ultra-courtes (Cf. Chap. 5). Donc, pour des milieux actifs pompés avec des sources conventionnelles (par exemple une diode laser, lampe flash ou une décharge électrique), aucune inversion de population n'est possible en pratique pour un système à deux niveaux; dans le meilleur des cas, les populations s'égalisent et le système tend à devenir transparent aux hautes intensités du laser incident. Pour pouvoir obtenir une inversion de population (et un coefficient d'absorption négatif), il faut donc mettre à contribution un troisième niveau. Cependant, un système à quatre niveaux est encore plus favorable pour l'obtention de l'inversion de population; nous allons considérer un tel système, montré à la Fig. 1. Un pompage est réalisé entre le niveau fondamental (niveau 0) et un niveau excité (niveau 3); ce dernier relaxe rapidement vers un niveau 2. Celui-ci a une longue durée de vie, de sorte qu'il est possible d'accumuler un nombre appréciable de centres dans le niveau 2. Cet état peut relaxer vers un niveau inférieur (le niveau 1), qui relaxe à son tour rapidement vers l'état fondamental. On suppose que les atomes sont en interaction avec un champ dit "signal", d'intensité  $I_s$  résonant avec la transition entre les niveaux 1 et 2 et un champ incident  $I_p$ , de pompage, résonant avec une transition entre les niveaux 0 et 3 qui tient lieu de source de pompage. Les équations de cinétique des niveaux peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{dN_3}{dt} = \frac{I_p}{h\nu_p} (\sigma_{ap} N_0 - \sigma_{ep} N_3) - \gamma_3 N_3, \quad (1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \gamma_{32} N_3 - \gamma_2 N_2 - \frac{I_s}{h\nu_s} (\sigma_{es} N_2 - \sigma_{as} N_1), \quad (2)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = \gamma_{31} N_3 + \gamma_{21} N_2 - \gamma_1 N_1 + \frac{I_s}{h\nu_s} (\sigma_{es} N_2 - \sigma_{as} N_1), \quad (3)$$

$$\frac{dN_0}{dt} = \frac{I_p}{h\nu_p} (\sigma_{ep} N_3 - \sigma_{ap} N_0) + \gamma_{30} N_3 + \gamma_{20} N_2 + \gamma_1 N_1, \quad (4)$$

où  $\gamma_1 \equiv \frac{1}{\tau_1}$ ,  $\gamma_2 \equiv \frac{1}{\tau_2} = \gamma_{20} + \gamma_{21}$  et  $\gamma_3 \equiv \frac{1}{\tau_3} = \gamma_{30} + \gamma_{31} + \gamma_{32}$  sont les inverses des temps de vie des niveaux

1, 2 et 3 respectivement, qui prennent en compte à la fois les relaxations radiatives et non radiatives.

$\sigma_{ap} \equiv \sigma_a(\nu_p)$ ,  $\sigma_{ep} \equiv \sigma_e(\nu_p)$ ,  $\sigma_{as} \equiv \sigma_a(\nu_s)$ ,  $\sigma_{es} \equiv \sigma_e(\nu_s)$  sont les sections efficaces effectives d'absorption et d'émission aux fréquences de la pompe,  $\nu_p$ , et du signal,  $\nu_s$ . Notez que les quatre équations

ne sont pas indépendantes pour un système fermé, puisque:  $\sum_{i=0}^3 N_i = N$ , où  $N$  est la concentration totale de centres luminescents.

Nous allons faire quelques hypothèses, qui sont souvent valides en pratique dans les matériaux amplificateurs, qui permettent de simplifier les équations et leur analyse par la suite et d'arriver à des conclusions assez générales sur le fonctionnement des lasers. Ces hypothèses ne sont toutefois pas indispensables pour le fonctionnement des lasers. D'abord, l'équation (1) peut aussi s'écrire :

$$\frac{dN_3}{dt} = R_p - \gamma_3 N_3, \quad (5)$$

où

$$R_p' = \frac{I_p}{h\nu_p} (\sigma_{ap} N_0 - \sigma_{ep} N_3) \cong \frac{I_p \sigma_{ap} N_0}{h\nu_p} \quad (6)$$

est un taux de pompage vers le niveau 3.

Première hypothèse : relaxation quasi-instantanée à partir du niveau 3. On suppose que le temps de vie du niveau 3 est tel que celui-ci se vide très rapidement par rapport aux autres temps caractéristiques du problème. Le niveau trois atteint alors sa population d'équilibre sur une échelle de temps très courte, de l'ordre de  $\tau_3 \equiv \gamma_3^{-1}$ . On peut donc supposer que la population du niveau trois suit le taux de pompage si celui-ci varie lentement à l'échelle de  $\tau_3$ . La solution de l'équation (5) s'écrit alors:

$$N_3(t) = \frac{R_p'(t)}{\gamma_3}. \quad (7)$$

En remplaçant (7) dans (2), on trouve :

$$\frac{dN_2}{dt} = R_p - \gamma_2 N_2 - \frac{I_s}{h\nu_s} (\sigma_{es} N_2 - \sigma_{as} N_1), \quad (8)$$

où

$$R_p = \eta_p \frac{I_p \sigma_{ap} N_0}{h\nu_p} \quad (9)$$

et  $\eta_p = \frac{\gamma_{32}}{\gamma_3}$  est l'efficacité de pompage, c'est-à-dire la probabilité que l'absorption d'un photon produise

un état excité dans le niveau 2.  $R_p$  est le taux de pompage dans le niveau 2. Idéalement, tous les ions excités dans l'état 3 relaxent vers l'état 2, c.-à-d.  $\gamma_{31} = \gamma_{30} = 0$ , de sorte que :  $\eta_p = 1$ .

Seconde hypothèse: relaxation quasi-instantanée du niveau 1 vers le niveau fondamental (niveau 0).

On suppose que le niveau 1 relaxe très vite vers le niveau 0 de sorte que ce niveau est pratiquement vide :

$N_1 \approx 0$ . Alors, l'équation (8) devient :

$$\frac{dN_2}{dt} = R_p - \gamma_2 N_2 - \frac{I_s \sigma_{es} N_2}{h\nu_s}. \quad (10)$$

On peut facilement montrer que la population du niveau 2 s'exprime en régime stationnaire sous la forme :

$$N_2 = \frac{R_p \tau_2}{1 + \frac{I_s}{I_{sat}}}. \quad (11)$$

On demande à la question 2 de démontrer l'expression (11) et de donner les expressions correctes de  $I_{sat}$  et de  $R_p$ . Ces deux hypothèses définissent ce que l'on appelle un "système à quatre niveaux idéal".

Le schéma d'un système idéal à quatre niveaux est montré à la Fig. 2. D'après l'équation (11), pour un taux de pompage  $R_p$  donné (qui contient  $I_p$ ), on observe une diminution de  $N_2$  en fonction de l'intensité du champ  $I_s$ . Pour une intensité  $I_s$  égale au paramètre de saturation, la population  $N_2$  sera réduite de moitié. S'il existe plusieurs modes du résonateur susceptibles d'osciller dans la bande de fluorescence, la saturation de  $N_2$  produira une atténuation du gain simultanément pour tous les modes, Cf. Fig. 3.<sup>1</sup>

Finalement, dans un système à quatre niveaux idéal, les niveaux un et trois se dépeuplent assez vite pour qu'on puisse négliger les populations  $N_1$  et  $N_3$ . La cinétique des populations se réduit alors à l'équation (10) et la conservation du nombre de centres :  $N_0 + N_2 \cong N$ . Donc, pour un système à quatre niveaux idéal, la connaissance de  $N_2(t)$  en tout temps nous donne un portrait complet de la population des différents niveaux. Les deux hypothèses ci-haut impliquent que la différence d'énergie entre les niveaux deux et trois,

---

<sup>1</sup> Rappelons que le gain est égal à :  $-\alpha(\nu) = N_2 \sigma_{es}(\nu) - N_1 \sigma_{as}(\nu) \cong N_2 \sigma_{es}(\nu)$ .

et celle entre les niveaux zéro et un, sont grandes devant  $k_B T$ , de sorte qu'il ne reste aucune population résiduelle dans les niveaux un et trois liée à la loi de Maxwell-Boltzmann après que ces niveaux ont relaxé. On pourrait cependant facilement modifier ces équations dans l'hypothèse où les niveaux 1 et 3 sont peuplés thermiquement, ce qui correspond au cas du  $Yb^{3+}$ .

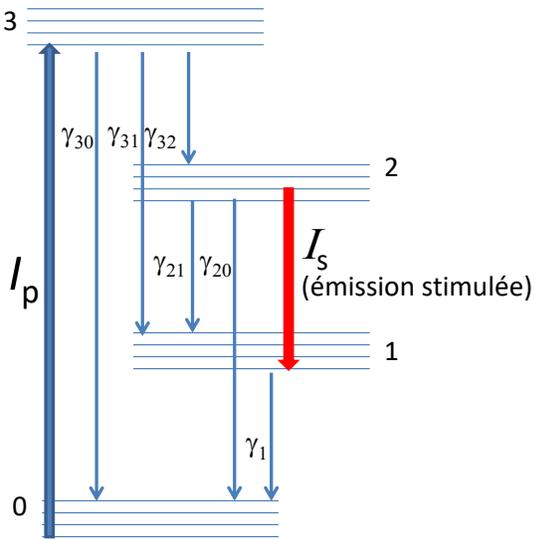


Fig. 1. Diagramme d'un système énergétique à quatre niveaux.

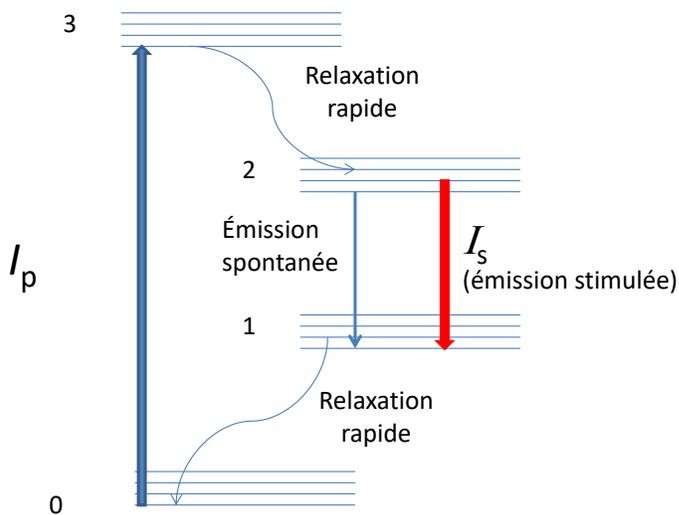


Fig. 2. Système à quatre niveaux idéal.

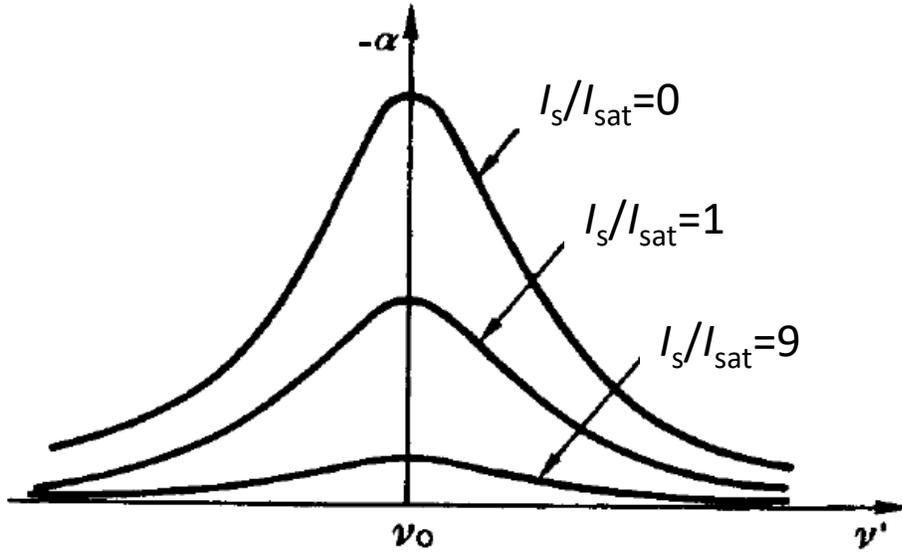


Fig. 3 Exemple d'une courbe de gain, i.e., l'opposé de l'absorption, en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de  $I_s/I_{\text{sat}}$  [4].

### 10.2 Rappel sur la relation entre le nombre de photons et l'intensité $I_s$ .

L'équation (10) joue un rôle important dans l'étude conceptuelle de la dynamique des lasers. Nous allons maintenant établir une équation similaire pour décrire l'évolution du nombre de photons  $q(t)$  dans un mode d'émission d'un résonateur; cette équation dépendra de la population du niveau excité. On obtiendra ainsi un système d'équations couplées pour  $N_2(t)$  et  $q(t)$ . Il est alors souhaitable d'exprimer l'intensité  $I_s$  en termes de nombre de photons puisque les processus d'absorption et d'émission se font par échange de photons. La relation entre l'intensité  $I_s$  et un flux de photons  $\phi \equiv FS$  [qui est le nombre de photons frappant un objet par seconde de surface  $S$  par seconde] est donnée par :

$$\phi = \frac{I_s S}{h\nu}, \quad (12)$$

où  $S$  est la surface du mode d'émission. Par ailleurs, le nombre de photons qui frappent une surface  $S$  dans un intervalle de temps  $dt$  est égal au nombre de photons dans le volume  $c dt S$ . Par simplicité, on va

supposer un résonateur en anneau avec un flux de photons unidirectionnel; ceci nous évitera d'avoir à considérer deux ondes qui se propagent en sens contraires dans un résonateur à onde stationnaire. On a alors :

$$\phi = q \frac{cS}{V}, \quad (13)$$

où  $q$  est le nombre total de photons dans le mode dominant, de volume  $V$ , du résonateur. En combinant les équations (12) et (13), on trouve :

$$q = \frac{I_s V}{h\nu_s c}. \quad (14)$$

On peut alors exprimer l'équation (10) sous la forme :

$$\frac{dN_2}{dt} = R_p - \gamma_2 N_2 - \frac{q^* \sigma_{es} c N_2}{V} \quad (15)$$

Nous avons utilisé la notation  $q^*$  au lieu de  $q$ . L'interprétation de  $q^*$  dépend du régime dans lequel on est, c'est-à-dire en dessous ou au-dessus du seuil. En dessous du seuil,  $q^*$  est le nombre total de photons

$q^* \cong \sum_{m,n,p,\vec{e}} q_{mnp}$  dans les modes du résonateur d'indices transverses  $m$  et  $n$ , longitudinal  $p$ , et de polarisation

$\vec{e}$  qui chevauchent la raie de transition entre les niveaux 2 et 1. Les modes de fréquence  $\nu$ , de nombre d'onde

$\vec{k}$  et de polarisation  $\vec{e}$  qui ne sont pas en résonance dans le résonateur sont en quantité négligeable car, ces

photons n'étant pas piégés, leur durée de séjour dans celui-ci est négligeable. En revanche, au-dessus du seuil, nous allons voir que la population de l'état excité est fixée par les pertes du résonateur [5], et alors

seul le mode ayant le coefficient de gain le plus élevé pourra entrer en oscillation. Dans ce cas,  $q^* \cong q_0$  est

le nombre de photons dans le mode dominant et le nombre de photons dans les autres modes est négligeable

(Cf. Fig. 12 pour une illustration de la distribution des photons dans les différents modes en dessous et au-dessus du seuil). Donc, en résumé, on aura :

1) En dessous du seuil :  $q^* = \sum_{m,n,p,\vec{e}} q_{mn\vec{e}} \approx \chi q_{m_0 n_0 p_0 \vec{e}_0}$  , où  $\chi$  est le nombre de modes du résonateur dans

la bande de fluorescence de la transition laser autour de la fréquence  $\nu_s$ .

2) Au-dessus du seuil:  $q^* \cong q_0$  , où  $q_0$  est le nombre de photons du mode dominant d'indices  $m_0, n_0, p_0, \vec{e}_0$  , qui va osciller.

Pour des raisons de commodité, nous allons réécrire l'équation (15) en fonction du nombre total d'atomes:

$$\frac{dN_t}{dt} = R - \gamma_2 N_t - \frac{q^* \sigma_{es} c N_t}{V}, \quad (16)$$

où  $N_t = N_2 V$  et le nombre total d'atomes dans l'état excité qui chevauchent le volume du mode et où  $R = R_p V$  est le taux de pompage total [ $s^{-1}$ ] et où l'on suppose que tout le volume du mode dans le résonateur est occupé par le milieu actif. Notons finalement que le coefficient  $\gamma_2$  représente le taux d'émission spontanée dans tous les modes, c'est-à-dire ceux du résonateur et les autres de l'espace libre.

### 10.3 L'équation d'évolution pour les photons.

Nous avons vu à la section précédente que la population du niveau excité était influencée par le nombre de photons dans le résonateur (Cf. éq. 16). L'inverse est aussi vrai : le nombre de photons sera influencé par la population  $N_t$ . Les Fig. 4 et 5 illustrent les processus qui affectent simultanément les populations  $N_t$  et  $q$  :

- 1) L'émission spontanée ou stimulée dans un mode du résonateur. Dans ce cas, l'émission s'accompagne à la fois d'une diminution de  $N_t$  d'une unité, et d'un gain de photon d'une unité. (Fig. 4)

- 2) L'absorption d'un photon s'accompagne à la fois d'une augmentation de  $N_t$  d'une unité, et d'une perte de photon d'une unité (Cf. Fig. 5).

Il existe aussi des processus qui affectent soit la population  $N_t$ , soit le nombre de photons  $q$  mais pas les deux à la fois (Cf. Fig. 6-7). Ceux-ci sont:

- 3) Une relaxation non-radiative s'accompagne d'une diminution de  $N_t$  d'une unité sans modifier le nombre de photons. L'émission spontanée dans un mode autre que celui du résonateur aura le même effet car ces photons ne restent pas piégés dans le résonateur (Cf. Fig. 6).
- 4) Une fuite d'un photon piégé hors du résonateur s'accompagne d'une baisse du nombre de photons d'une unité sans changer la population  $N_t$  (Cf. Fig. 7).

En prenant en compte tous ces processus, on obtient, pour chaque mode du résonateur, une équation pour le nombre de photons en fonction du temps pour le mode d'indices transverses  $m$  et  $n$ , longitudinal  $p$ , et de polarisation  $\vec{e}$  :

$$\frac{dq_{mn\vec{e}}}{dt} = \frac{cN_t\sigma_{es}}{V}(1 + q_{mn\vec{e}}) - \gamma_c q_{mn\vec{e}}, \quad (17a)$$

où les termes dans le membre de droite correspondent, dans l'ordre, à l'émission spontanée dans le mode du résonateur considéré, l'émission stimulée dans ce mode, et la fuite de photons hors du résonateur. La constante  $\gamma_c$  correspond à l'inverse d'un temps de séjour moyen d'un photon dans le résonateur. Notez que les pertes de photons dues à l'absorption depuis l'état 1 ne sont pas prises en compte car on a supposé que le niveau 1 était vide puisqu'il se dépeuple quasiment instantanément.

Dans la suite, nous allons nous concentrer sur les  $q_0$  photons du mode dominant, qui est celui pour lequel la section efficace d'émission effective est la plus grande et qui sera le premier à osciller. L'équation (17a) devient alors :

$$\frac{dq_0}{dt} = \frac{cN_t\sigma_{es}}{V}(1+q_0) - \gamma_c q_0. \quad (17b)$$

Les équations (16-17b) forment un système couplé de deux équations différentielles pour le nombre photons et les populations.

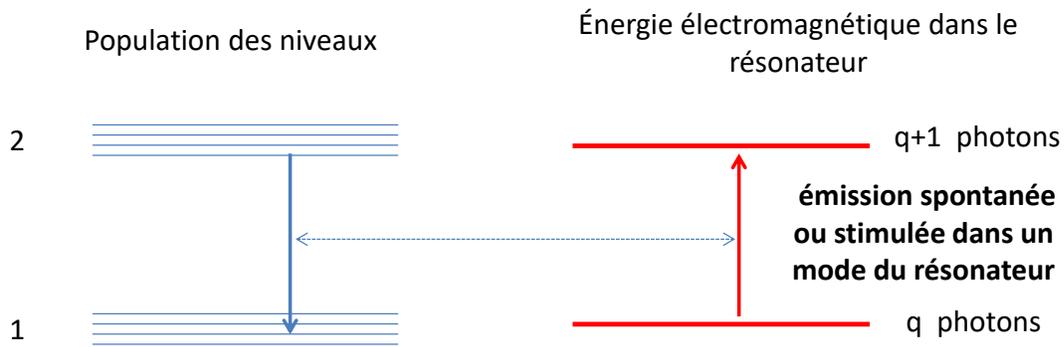


Fig. 4. L'émission spontanée ou stimulée dans un mode d'un résonateur crée un photon de plus dans le résonateur et ceci s'accompagne d'une diminution du nombre d'atomes dans le niveau excité.

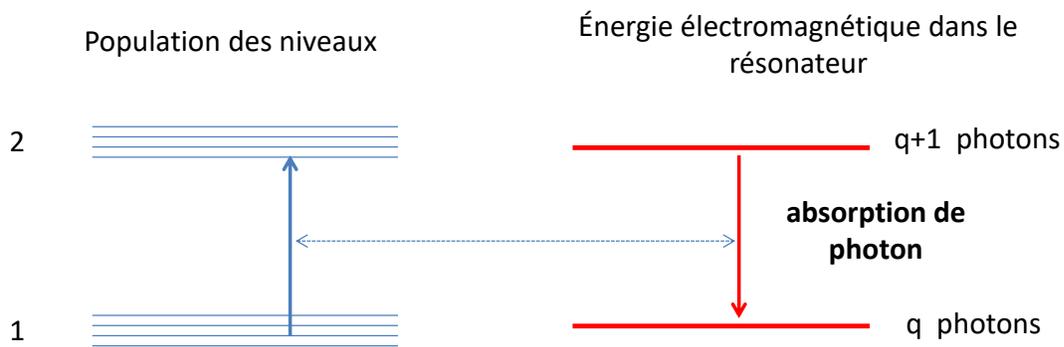


Fig. 5. Processus d'absorption. La perte d'un photon s'accompagne de l'augmentation de la population du niveau excité.

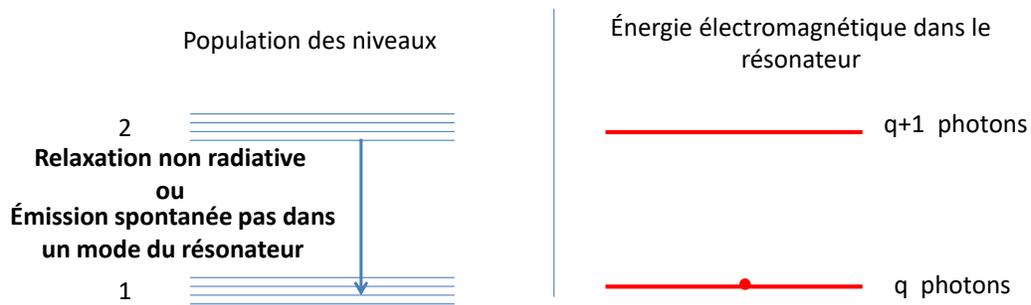


Fig. 6. Exemple d'un processus de relaxation non-radiative; le nombre de photons dans le résonateur demeure inchangé.

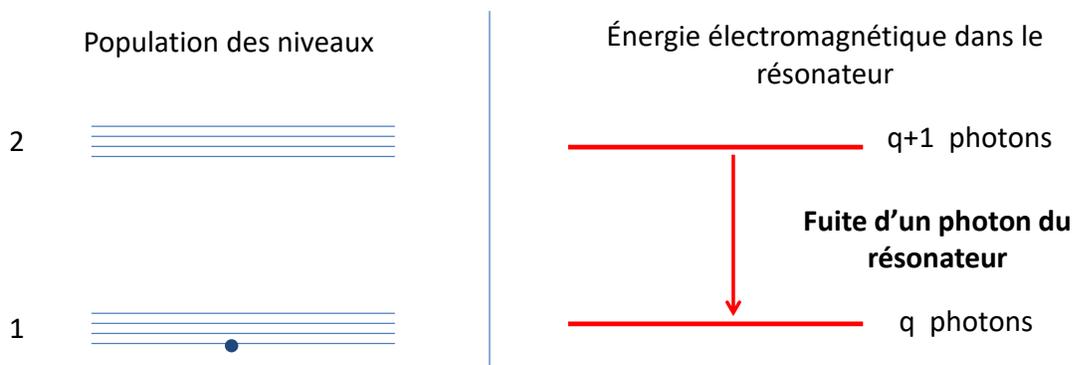


Fig. 7. Exemple d'un processus de fuite d'un photon à l'extérieur du résonateur. La population des niveaux d'énergie demeure inchangée.

#### 10.4. Élimination des sections efficaces dans les équations (16-17) et introduction du paramètre $\beta$ .

Nous pouvons éliminer les sections efficaces dans les équations (16) et (17) en utilisant l'équation du Füchtbauer-Ladenburg [6]:

$$\sigma_e(\nu) = \frac{1}{\tau_{rad}} \frac{c^2}{8\pi\nu^2} g(\nu). \quad (6.19)$$

On définit le paramètre  $\beta$  comme suit:

$$\beta \equiv \frac{V}{c \sigma_e(\nu) \tau_{rad}}. \quad (18)$$

À partir de (6.19), on en déduit :

$$\beta = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{g(\nu)} V. \quad (19)$$

Or,  $g(\nu)$  est la fonction forme de raie, qui est normalisée,  $\int g(\nu) d\nu = 1$ . Au voisinage du maximum de cette

raie, on aura :  $g(\nu_s) \Delta\nu \approx 1$ . Étant donné que  $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$  représente le nombre de modes par unité de fréquence

et de volume, on en déduit que  $\beta$  est de l'ordre du nombre total de modes dans la bande de fluorescence dans la transition considérée. Il s'agit de tous les modes, y compris ceux pour lesquels les photons ne restent

pas piégés dans le résonateur. Rigoureusement,  $\beta(\nu)$  représente le rapport entre le taux d'émission spontanée (dans tous les modes à toutes les fréquences) et le taux d'émission spontanée dans le mode considéré de

fréquence  $\nu$ . Si on suppose que :  $\gamma_2 \cong \gamma_{rad} \equiv \frac{1}{\tau_{rad}}$ , les équations (16-17b) deviennent respectivement :

$$\frac{dN_t}{dt} = R - \gamma_{rad} N_t \left( 1 + \frac{q^*}{\beta} \right) \quad (20)$$

et

$$\frac{dq_0}{dt} = \gamma_{rad} N_t \frac{1}{\beta} (1 + q_0) - \gamma_c q_0. \quad (21)$$

### 10.5. Solutions en régime stationnaire et notion de seuil d'oscillation

Nous allons maintenant résoudre le système d'équations (20-21) en régime stationnaire. En pratique, les solutions  $q^*$  ou  $q_0(t)$  et  $N_t(t)$  peuvent ne pas tendre vers un régime stationnaire, en particulier si le taux

de pompage n'est pas constant dans le temps. Même pour un taux de pompage constant, la dynamique des couplages entre  $q_0$  et  $N_t$  peut donner lieu à une série d'impulsions en régime transitoire, que l'on nomme oscillations de relaxation [7]. Les oscillations de relaxation se produisent en régime transitoire dans la plupart des lasers à l'état solide avant que ceux-ci atteignent leur état d'équilibre lorsqu'on les allume; les oscillations peuvent aussi continuer indéfiniment, par exemple lorsque le matériau est pompé légèrement au-dessus du seuil. Les Fig. 8 et 9 donnent respectivement des exemples numériques et expérimentaux de solution du système (20-21) en régime transitoire pour le nombre de photons et la population de l'état excité. Dans le dernier cas, il s'agit d'un laser à état solide  $Y_3Al_5O_{12}$  dopé à l' $Yb^{3+}$  opéré au-dessus du seuil.

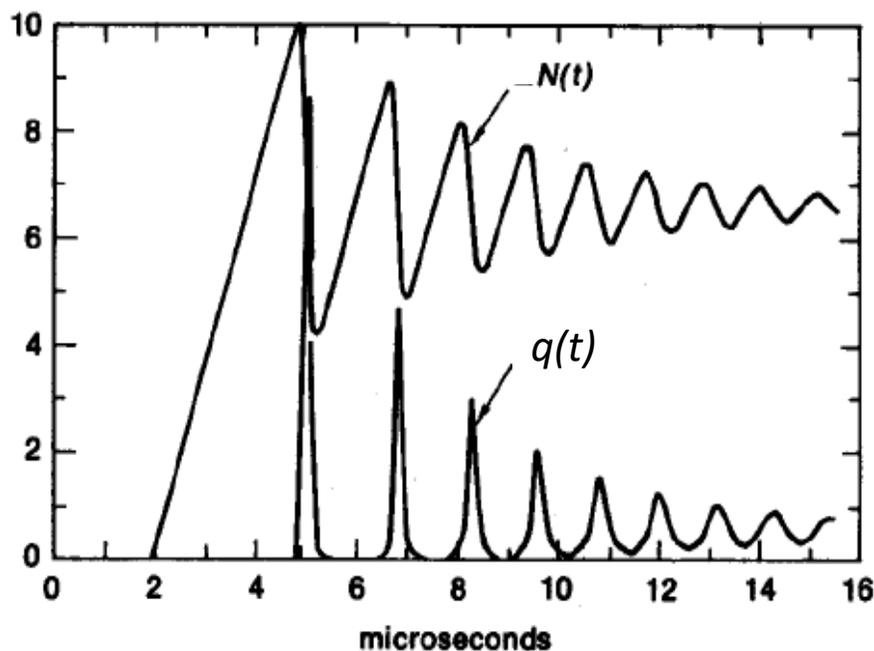


Fig. 8 Évolution de l'inversion de population et du nombre de photons  $q$  en fonction du temps. Ce comportement, qu'on obtient en régime transitoire, s'appelle oscillations de relaxation [8].

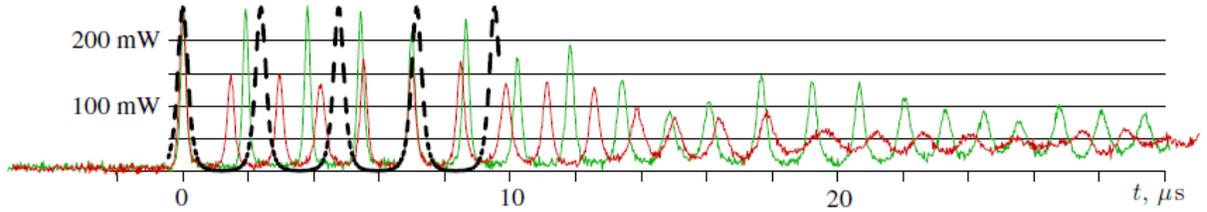


Figure 6. Output power versus time since the first maximum: two experimental realizations of the self-pulsation (thin curves) and the approximation using equation (7) (dashed curve).

Fig. 9. Évolution du nombre de photons à la sortie du laser  $\text{Yb}^{3+}:\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$  pompé par laser diode en fonction du temps après que la diode laser est allumée en continu [9].

En régime stationnaire, on a :  $\frac{dq^*}{dt} = 0$  et  $\frac{dN_t}{dt} = 0$ , et (20-21) deviennent respectivement:

$$R - \gamma_{rad} N_t \left( 1 + \frac{q^*}{\beta} \right) = 0 \quad (22)$$

et

$$\gamma_{rad} N_t \frac{1}{\beta} (1 + q_0) - \gamma_c q_0 = 0. \quad (23)$$

Dans la suite, on définit un taux de pompage normalisé comme suit :  $r = \frac{R}{\gamma_c \beta}$ .

#### 10.5.1 Fonctionnement en dessous du seuil, $r < 1$ .

Nous nous plaçons dans le cas où l'émission est répartie sur tous les modes du résonateurs qui chevauchent la courbe de gain du milieu amplificateur (Cf. Fig. 12 figure du bas), i.e., :  $q^* \approx \chi q_0$  où  $q_0$  est le nombre de photons dans le mode "dominant". De (22) et (23), on tire respectivement:

$$N_t = \frac{R}{1 + \frac{\chi q_0}{\beta} \gamma_{rad}} \quad (24)$$

et

$$q_0 = \frac{N_t}{N_s - N_t}, \quad (25)$$

où  $N_s \equiv \frac{\gamma_c \beta}{\gamma_{rad}}$ . On verra plus tard l'interprétation qu'on peut donner à  $N_s$ . Pour l'instant, faisons l'hypothèse

que le taux de pompage  $r$  est suffisamment petit pour que:  $q_0 \ll \frac{\beta}{\chi}$ . Notons que le rapport  $\beta/\chi$  est un

grand nombre pour un résonateur de dimensions macroscopiques (voir la question 7). De l'équation (24),

on peut voir que la population de l'état excité évolue alors linéairement avec le taux de pompage  $R$  tant que

$q_0 \ll \beta/\chi$ , i.e.:  $N_t = R/\gamma_{rad}$ . Un exemple de calcul est montré au Tableau 1 dans le cas où  $N_t < N_s$ .

Remarquez que le nombre de photons  $q_0$  est petit par rapport à  $\beta$ , ce qui indique que le nombre de photons

par mode est petit devant l'unité : ceci est une caractéristique d'un laser opérant sous le seuil. En utilisant

(24) et l'approximation  $q_0 \ll \beta/\chi$ , on peut exprimer (25) sous la forme :

$$q_0 = \frac{r}{1-r}, \quad (26)$$

où  $r < 1$ . Donc l'hypothèse  $q_0 \ll \beta/\chi$  est valide pour  $r < 1$  pour des valeurs de  $\beta$  et  $\chi$  d'un résonateur aux dimensions macroscopiques.

Tableau 1. Évolution du nombre de photons dans le résonateur (colonne 2) en fonction de la population du niveau excité (colonne 3) pour le cas où  $N_t < N_s$ . La cinquième colonne montre que la population de l'état excité est égale

à  $N_t = R/\gamma_{rad}$ , i.e., proportionnelle au taux de pompage. On a choisi  $\beta = 10^8$  et  $\chi = 10^2$ .

$r = \frac{R}{\gamma_c \beta}$	$q_0 = \frac{r}{1-r}$	$N_t/N_s$	$\chi/\beta q_0$	$\frac{N_t}{R/\gamma_{rad}}$ (éq. 24)
0.5	1	0.5	$10^{-6}$	$\sim 1$
0.9	9	0.9	$10^{-5}$	$\sim 1$
0.99	99	0.99	$10^{-4}$	$\sim 1$
0.999	999	0.999	$10^{-3}$	0.999

### 10.5.2 Cas où le laser est au-dessus du seuil, $r > 1$ .

On s'intéresse maintenant à la situation où  $r > 1$ . Dans ce cas, la quasi-totalité des photons sont dans le mode dominant :  $q^* \approx q_0$  (Cf. Fig. 12, les trois figures du haut). De l'équation (22), on tire alors:

$$q_0 = \beta \left( r \frac{N_s}{N_t} - 1 \right) \quad (27)$$

Rappel :  $r = \frac{R}{\gamma_c \beta}$  est un taux de pompage normalisé.

De l'équation (23), on tire :

$$N_t = N_s \frac{q_0}{q_0 + 1} \quad (28)$$

On peut voir à partir du tableau 1 que  $q_0$  est très grand dès que  $r$  approche l'unité. Ceci est *a fortiori* vrai pour  $r > 1$ . À partir de (28), on peut voir que, quand  $q_0$  est très grand, on a :

$$N_t \cong N_s \quad (29)$$

On interprète  $N_s$  comme la population minimale de l'état excité nécessaire pour obtenir l'oscillation laser; cette population demeure constante en fonction du taux de pompage au-dessus du seuil. Ainsi, la population

du niveau excité demeure constante indépendamment de  $q_0$  lorsque  $q_0 \gg 1$ . En insérant (29) dans (27), on trouve :

$$q_0 = \beta(r-1) \quad (30)$$

On voit que le nombre de photons dans le mode dominant est de l'ordre de  $\beta$ . Donc, l'équation (30) s'applique au cas où  $r > 1$ . La population de l'état excité  $N_i$  reste constante et égale à  $N_s$  et le nombre de photons dans le résonateur augmente linéairement avec  $r$ .

En conclusion, pour  $r < 1$ , la population de l'état excité évolue linéairement avec le taux de pompage, alors que pour  $r > 1$ , la population de l'état excité est figée à une valeur  $N_s$  et le nombre de photons évolue linéairement avec le taux de pompage. On peut alors affirmer que, pour  $r < 1$ , l'énergie du pompage est transférée aux atomes, alors que pour  $r \geq 1$  l'énergie est transférée au champ électromagnétique dans un mode du résonateur. La transition entre les deux régimes à  $r=1$  correspond au seuil de l'oscillation laser. La situation est résumée aux Fig. 10 et 11. La transition entre le régime  $r < 1$  et  $r > 1$  est beaucoup moins tranchée si le résonateur a des dimensions microscopiques; en effet, dans ce cas, le nombre  $\beta$  devient beaucoup plus petit et le passage entre le régime où la luminescence est partagée entre tous les modes et celui où le rayonnement est concentré dans un seul mode à cause de l'émission stimulée est moins raide.

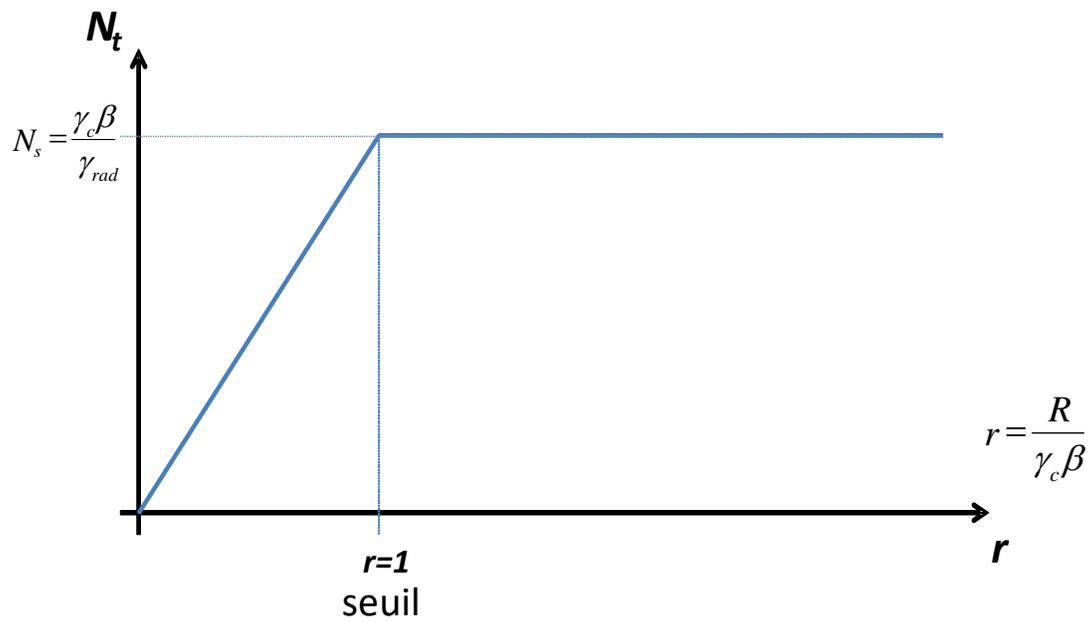


Fig. 10 Évolution de la population de l'état excité en fonction du taux de pompage. À partir de  $r=1$ , la population de l'état excité devient constante, indépendante du taux de pompage.

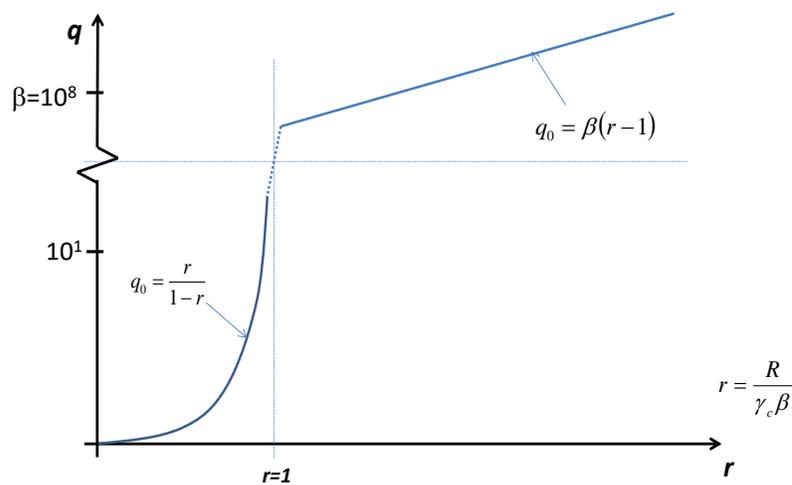


Fig. 11 Évolution du nombre photons dans le résonateur en fonction du taux de pompage. Au voisinage de  $r=1$ ,  $q$  augmente très rapidement pour atteindre des valeurs de l'ordre de  $\beta$ . On a pris ici  $\beta=10^8$ .

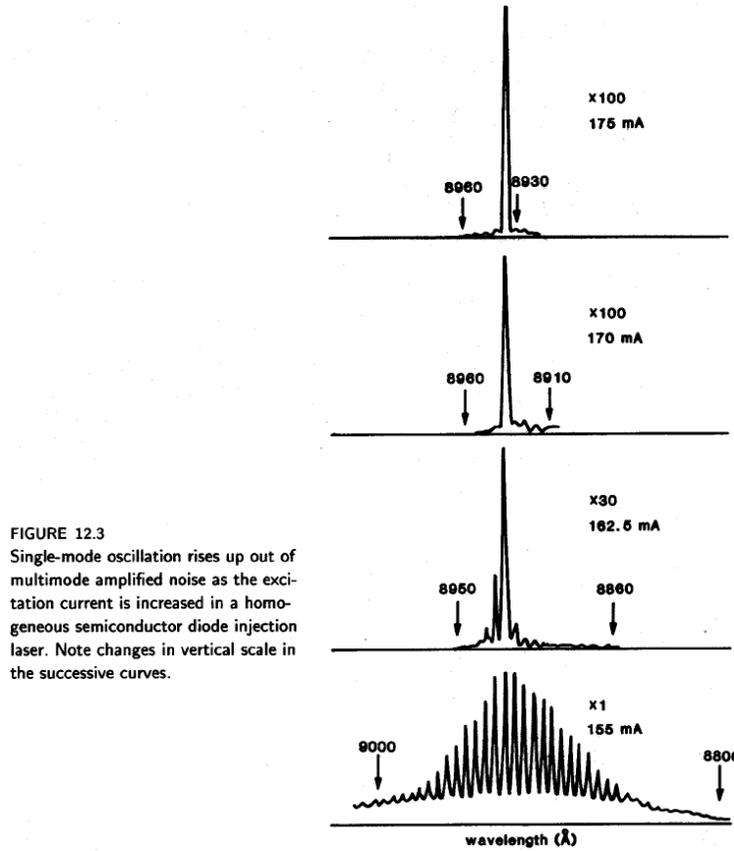


Fig. 12 Illustration de spectres d'émission à la sortie d'un résonateur en dessous (en bas) et au-dessus du seuil (trois figures du haut) [10].

10.6 Conclusions

Nous avons introduit les équations de débit d'un système à quatre niveaux. Dans le cas idéal, où le niveau 3 et le niveau 1 relaxent très vite vers les niveaux 2 et 0 respectivement, on dit que le système à quatre niveaux est idéal. Les équations d'évolution se réduisent à une seule équation qui a la forme :

$$\frac{dN_2}{dt} = R_p - \gamma_2 N_2 - \frac{I_s \sigma_{es} N_2}{h\nu_s}, \tag{10}$$

qui s'écrit en fonction du nombre de photons  $q^*$ , du nombre total d'atomes,  $N_t = N_2 V$ , comme:

$$\frac{dN_t}{dt} = R - \gamma_{rad} N_t \left( 1 + \frac{q^*}{\beta} \right). \tag{20}$$

Le coefficient  $\beta = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{g(\nu)} V$  (19) représente le rapport entre le taux d'émission spontanée (dans tous

les modes à toutes les fréquences) et le taux d'émission spontanée dans le mode considéré de fréquence  $\nu$ .

Nous avons ensuite introduit une équation différentielle régissant le nombre de photons dans le résonateur :

$$\frac{dq_0}{dt} = \gamma_{rad} N_t \frac{1}{\beta} (1 + q_0) - \gamma_c q_0. \quad (21)$$

La résolution conjointe des équations 20-21 permet de calculer la dynamique de l'évolution du nombre de photons et du nombre d'atomes dans l'état excité en fonction du temps. En particulier, ces équations permettent de retrouver les oscillations de relaxation au démarrage du laser ainsi que les valeurs en régime stationnaire de  $q_0$  et  $N_t$  en fonction du taux de pompage. Elles permettent d'observer un seuil en dessous duquel l'énergie du pompage est transférée aux atomes, et au-dessus duquel l'énergie est plutôt transférée au champ électromagnétique dans un mode privilégié du résonateur.

### Questions:

1. Interpréter physiquement chacun des termes dans les équations (1) à (4)?
2. Montrer que l'on peut exprimer la population du niveau 2 en régime stationnaire sous la forme :

$$N_2 = \frac{R_p \tau_2}{1 + \frac{I_s}{I_{sat}}} \quad (11) \text{ et donner les expressions de } I_{sat} \text{ et de } R_p.$$

3. Tracer l'allure du coefficient d'absorption à la fréquence  $\nu_s$  en fonction de  $I_s$  pour un taux de pompage  $R_p$  donné. Peut-on avoir du gain à la fréquence  $\nu_s$ ?
4. Peut-on avoir un coefficient d'absorption négative? Si oui, dans quelle conditions?

5. Démontrer l'équation (13).

6. Quelles sont les dimensions de  $\beta$  ?

7. Calculer  $\beta$  et  $\chi$  pour un résonateur quasi-planaire en anneau de longueur  $L=20$  cm, avec un rayon du mode gaussien au pincement de  $w_0=300$   $\mu\text{m}$  et où la raie de l'émission laser autour de  $\lambda=1$   $\mu\text{m}$  a une largeur de  $\Delta\lambda=1$  nm. Pour le calcul de  $\chi$ , supposer que seuls les modes transverse TEM<sub>00</sub> peuvent osciller.

Réponse :  $\beta \approx 10^8$  et  $\chi \approx 10^2$ .

8. Établir les équations (24-25).

9. Démontrer l'équation (26).

10. Si  $\chi = 1$ , démontrer qu'on peut écrire :

$$q_0 = \frac{\beta}{2} \left\{ (r-1) + \sqrt{(r-1)^2 + 4r/\beta} \right\} \quad (31)$$

où  $r > 0$ . Indice : combiner les équations (22-23) après avoir isolé  $N_t$  dans chacune d'elles. Que vaut  $q_0$  à  $r=1$ ? L'équation (31) généralise les cas en dessous et au-dessus du seuil.

11. Montrer que la condition (29) est équivalente à écrire que le taux de création de photons émis par émission stimulée est égal au taux de fuite des photons à l'extérieur du résonateur. Indice : calculer une constante de temps pour le taux de création de photons par émission stimulée et comparez la avec  $\gamma_c^{-1}$ .

Solution à la question 11 :

Supposons que le nombre de photons dans un mode du résonateur piégés à l'intérieur de celui-ci est grand devant l'unité. Alors le nombre de photons dans le résonateur est régi par l'équation différentielle :  $\frac{dq_0}{dt} \cong \left( \gamma_{rad} N_t \frac{1}{\beta} - \gamma_c \right) q_0$  dont la solution s'écrit:  $q(t) = q_0 \exp((\gamma_{st} - \gamma_c)t)$  où  $\gamma_{st} = \gamma_{rad} N_t \frac{1}{\beta}$ . Le nombre de photons va rester constant si  $\gamma_{st} = \gamma_c$  : un régime stationnaire est atteint; par ailleurs, le nombre de photons va croître si  $\gamma_{st} > \gamma_c$  ; du même coup, la population de l'état excitée va

décroître pour atteindre la condition d'équilibre :  $N_r = N_s = \frac{\gamma_c \beta}{\gamma_{rad}}$ . Pour que la saturation de l'état excité soit effective, il faut

que le nombre de photons atteigne une valeur de l'ordre de  $q_0 = \beta$  (éq. 20).

---

<sup>1</sup> La référence principale du chapitre est Delsart, sections 4.1 à 4.4, et Siegman, section 13.4.

<sup>2</sup> Le coefficient de gain n'est autre que l'opposé du coefficient d'absorption  $\alpha$ . Ainsi, quand le coefficient d'absorption est négatif, le gain est positif, ce qui signifie que l'émission stimulée est plus probable que l'absorption, ce qui implique l'existence d'une inversion de population.

<sup>3</sup> Ce temps est de l'ordre de la période de Rabi donnée par  $T_{Rabi} = \frac{h}{(\mu_{12} E_0)}$ , où  $\mu_{12} = \left\| \iiint \psi_1^*(\vec{r}) e\vec{r} \psi_2(\vec{r}) d^3\vec{r} \right\|$  et

$E_0$  est l'amplitude du champ électrique de l'onde incidente.

<sup>4</sup> Figure tirée de A. E. Siegman, *Lasers*.

<sup>5</sup> Il en est de même du gain en régime stationnaire, qui est lui aussi fixé par les pertes dans le résonateur.

<sup>6</sup> Ne pas oublier de prendre en compte l'indice  $n$  du matériau dans cette équation. Ceci fait apparaître  $n^2$  au dénominateur.

<sup>7</sup> Voir A. E. Siegman, *Lasers*, chapitre 25, section 25.1 ou W. Koechner, *Solid-state engineering* 6th Ed., Springer, 2006, chapitre 3, section 3.5.

<sup>8</sup> Figure tirée de A. E. Siegman, *Lasers*, p.960.

<sup>9</sup> Figure tiré de Kouznetsov, Bisson et al. *J. Phys. A : Math. Theor*, **40**, 2017, 2007.

<sup>10</sup> Figure tirée de A. E. Siegman, *Laser*, p. 464.