La symétrie parité-temps

Son origine en mécanique quantique et son utilisation dans les lasers

Jean-François Bisson

Département de physique et d’astronomie

Université de Moncton

Conférence de recherche

12 avril 2023

Quelques règles de mécanique quantique

- Un hamiltonien permet de déterminer les énergies des états propres d'un système quantique: $$\hat{H}\left|\psi\right\rangle = E\left|\psi\right\rangle \Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(x)\psi = E\psi$$
- Un hamiltonien permet de déterminer l'évolution d'un état quantique:

$$\hat{H}\left|\psi\right\rangle = i\hbar\frac{\mathrm{d}\left|\psi\right\rangle}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \left|\psi(t)\right\rangle = \exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)\left|\psi(t=0)\right\rangle$$

- $\hat{H}$ est un opérateur hermitique: $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$
  - Les valeurs d'énergie sont réelles
  - Préservation de la probabilité totale $\Rightarrow \hat{U} = \exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right) \qquad U^{-1} = U^\dagger$

Que l'hamiltonien d'un système quantique isolé soit hermitique semble aller de soi…

GCMP UNIVERSITÉ DE MONCTON

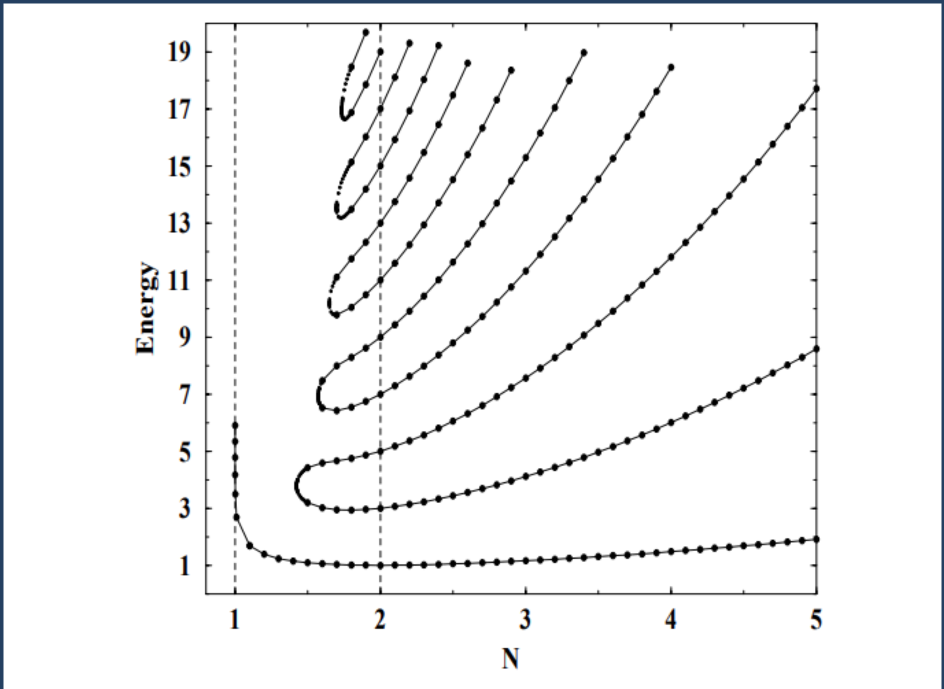
VOLUME 80, NUMBER 24 PHYSICAL REVIEW LETTERS 15 JUNE 1998

Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having $\mathcal{PT}$ Symmetry

Carl M. Bender[1] and Stefan Boettcher[2,3]
[1]*Department of Physics, Washington University, St. Louis, Missouri 63130*
[2]*Center for Nonlinear Studies, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico 87545*
[3]*CTSPS, Clark Atlanta University, Atlanta, Georgia 30314*
(Received 1 December 1997; revised manuscript received 9 April 1998)

The condition of self-adjointness ensures that the eigenvalues of a Hamiltonian are real and bounded below. Replacing this condition by the weaker condition of $\mathcal{PT}$ symmetry, one obtains new infinite classes of complex Hamiltonians whose spectra are also real and positive. These $\mathcal{PT}$ symmetric theories may be viewed as analytic continuations of conventional theories from real to complex phase space. This paper describes the unusual classical and quantum properties of these theories. [S0031-9007(98)06371-6]

PACS numbers: 03.65.Ge, 02.60.Lj, 11.30.Er



Les auteurs montrent qu'un Hamiltonien peut avoir un spectre à valeurs propres réelles et conserver la probabilité s'il satisfait à la symétrie *parité-renversement du temps* (*PT*)

$$\hat{H} = \hat{p}^2 - \left(i\hat{x}\right)^N$$

$$\hat{P}:\ \hat{p} \to -\hat{p} \quad \hat{x} \to -\hat{x}$$

$$\hat{T}:\hat{p} \to -\hat{p} \quad \hat{x} \to \hat{x} \quad i \to -i$$

Le spectre est entièrement réel et discret pour $N \geq 2$.

$$[\hat{P}\hat{T},\hat{H}] = 0 \quad \Rightarrow V\left(x\right) = V^*\left(-x\right)$$

UNIVERSITÉ DE MONCTON

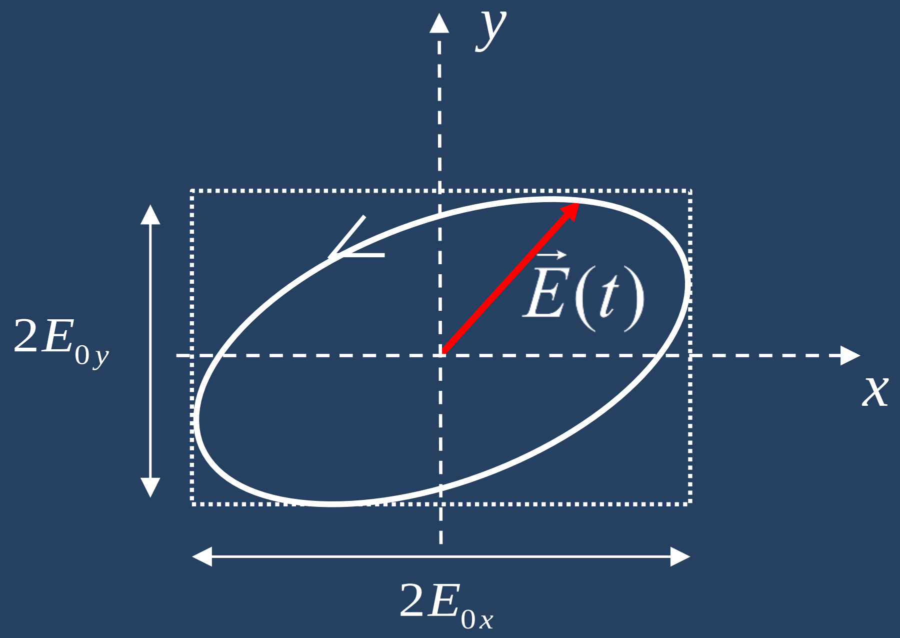
GCMP

L’étude de la symétrie PT dans l’espace des états de polarisations

La polarisation de la lumière

$$\vec{E} = E_{0x}\cos\left(kz - \omega t + \varphi_x\right)\hat{i} + E_{0y}\cos\left(kz - \omega t + \varphi_y\right)\hat{j}$$

- Le vecteur champ électrique parcourt une ellipse dont l'inclinaison et l'excentricité dépendent des valeurs de E_{0x}, E_{0y}, et $\varphi_y - \varphi_x$:

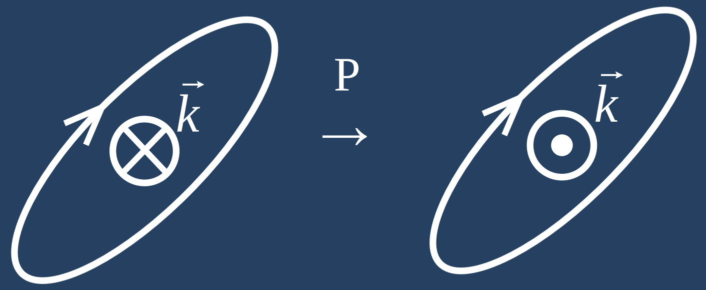


Notation condensée de Jones:

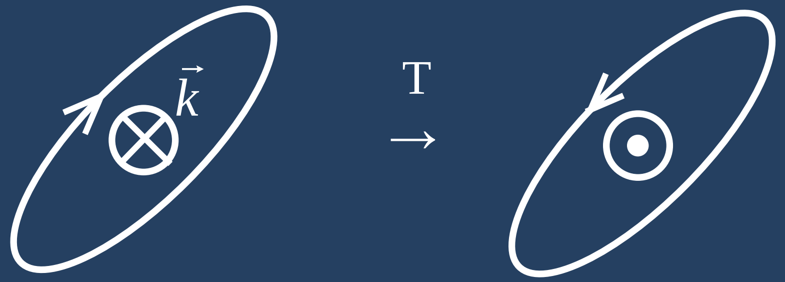
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x}\exp\left(i\varphi_x\right) \\ E_{0y}\exp\left(i\varphi_y\right) \end{pmatrix}$$

L’opérateur PT agissant sur les états de polarisation

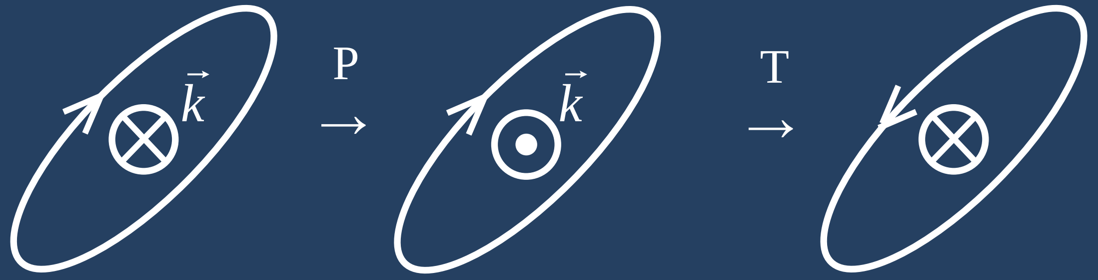
- Opérateur parité: $(x,y,z) \xrightarrow{\mathrm{P}} (-x,-y,-z)$



- Opérateur renversement du temps:



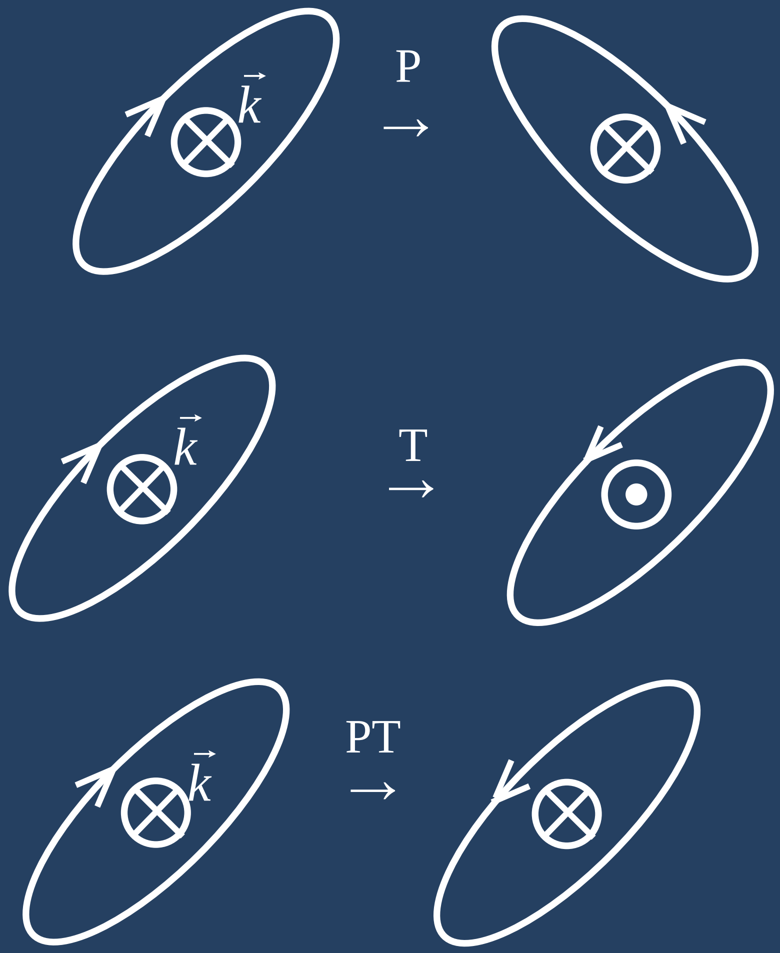
- Opérateur PT:



L’opérateur PT consiste à renverser seulement le sens de rotation de l’ellipse.

On remarque que P et T commutent et que $(PT)^2 = 1$

Représentation dans le formalisme de Jones



Base {h,v}

$$P_{\{h,v\}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{\{h,v\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} C$$

$$PT_{\{h,v\}} = -C$$

Base {g,d}

$$P_{\{g,d\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

complexe conjugué

$$T_{\{g,d\}} = C$$

$$PT_{\{g,d\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} C$$

Matrices de Jones PT-symétriques

- Une matrice de Jones J_{PT} est PT-symétrique ssi elle commute avec l'opérateur PT

$$PT\, J_{PT} = J_{PT}\, PT$$

- Faisons ce calcul dans la base $\{h,v\}$, pour laquelle on a : $PT_{\{h,v\}} = -C$

Le signe négatif devant le C ne joue aucun rôle

Soit $J_{PT} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{\{h,v\}}$ alors : $PTJ_{PT} = \begin{pmatrix} -a^* & -b^* \\ -c^* & -d^* \end{pmatrix} C = J_{PT}PT = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} C$ $\Rightarrow$ $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

- J_{PT} s'exprime différemment selon la base considérée.

Ex.: $$J_{PT} = \begin{pmatrix} \beta + i\gamma & \delta + i\eta \\ \delta - i\eta & \beta - i\gamma \end{pmatrix}_{\{g,d\}}$$ où $\beta, \delta, \gamma, \eta \in \mathbb{R}$

Théorème d'algèbre linéaire

(très utile en mécanique quantique)

Soient M et N deux opérateurs qui commutent et qui sont diagonalisables. Alors, il existe une base de vecteurs propres commune à M et N qui permet de diagonaliser ces deux matrices.

M et N n'ont pas nécessairement les mêmes valeurs propres.

En 2D, si les valeurs propres sont dégénérées, on est dans le cas trivial d'une matrice proportionnelle à la matrice identité.

Valeurs propres de l'opérateur J_{PT}

Soit $\vec{u}$ un vecteur propre commun à PT et J_{PT} : $PT\vec{u} = \lambda\vec{u}$ $J_{PT}\vec{u} = \Lambda\vec{u}$

$$\left.\begin{aligned} PTJ_{PT}\vec{u} &= PT\Lambda\vec{u} = \Lambda^{*}\lambda\vec{u} \\ J_{PT}PT\vec{u} &= J_{PT}\lambda\vec{u} = \Lambda\lambda\vec{u} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \Lambda \in \mathbb{R}$$

Quand J_{PT} et PT partagent un vecteur propre, la valeur propre associée à J_{PT} est réelle.

Peut-on en conclure que les valeurs propres de J_{PT} sont toujours réelles?

Calcul des vecteurs propres de PT et J_{PT}

$$PT\, J_{PT} = J_{PT}\, PT$$

- Dans la base $\{h,v\}$, on a : $PT_{\{h,v\}} = C \;\Rightarrow\; \vec{u} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ où $\begin{cases} c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ \lambda = 1 \end{cases}$

$$\underset{a,b,c,d\,\in\,\mathbb{R}}{J_{PT\{h,v\}}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \vec{u}_{\pm} = \begin{pmatrix} b \\ \Lambda_{\pm} - a \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \Lambda_{\pm} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc}$$

On note que les vecteurs propres de J_{PT} sont aussi vecteurs propres de PT seulement si $\Lambda_{\pm} \in \mathbb{R}$.

Mais ceci arrive seulement pour : $\Delta = (a-d)^2/4 + bc \geq 0$.

Pour $\Delta < 0$, J_{PT} et PT ne partagent pas de vecteurs propres. Les valeurs propres de J_{PT} sont complexes conjuguées.

Pour $\Delta = 0$, les valeurs propres <u>et les vecteurs propres</u> de J_{PT} sont dégénérés.

Récapitulation

$$J_{PT\{h,v\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \qquad\qquad \Delta = (a-d)^2/4 + bc$$

- Selon les valeurs que prennent *a*,*b*,*c*, *d*, on a trois cas possibles:
  - $\Delta > 0$: les vecteurs propres de J_{PT} sont partagés par *PT* et les valeurs propres de J_{PT} réelles : on dit qu'on a la symétrie PT *non brisée*.
  - $\Delta < 0$: les vecteurs propres de J_{PT} et PT ne sont pas partagés et les valeurs propres de J_{PT} sont complexes conjuguées: c'est la symétrie PT dite *brisée*.
  - $\Delta = 0$: la frontière entre les deux régions correspond à la coalescence des vecteurs et valeurs propres, qu'on appelle aussi *point exceptionnel* (PE).

Il semble que le théorème qu'on a vu tout à l'heure sur le partage des vecteur propres entre opérateurs qui commutent soit erroné.

Que se passe-t-il?

Antilinéarité de PT

- On pouvait penser que, parce que PT et J_{PT} commutent, ils devaient partager des vecteurs propres.
- Pour affirmer cela, nous nous sommes basés sur un théorème qui s'applique à des opérateurs linéaires.

$$J_{PT}\left\{c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2\right\} = c_1 J_{PT}\left(\vec{u}_1\right) + c_2 J_{PT}\left(\vec{u}_2\right)$$

opérateur linéaire

$$PT\left\{c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2\right\} = c_1^{\,*} PT\left(\vec{u}_1\right) + c_2^{\,*} PT\left(\vec{u}_2\right)$$

opérateur anti-linéaire

L'antilinéarité de PT provient de l'opérateur de renversement du temps.

- Le théorème ne s'applique donc pas à notre opérateur PT.

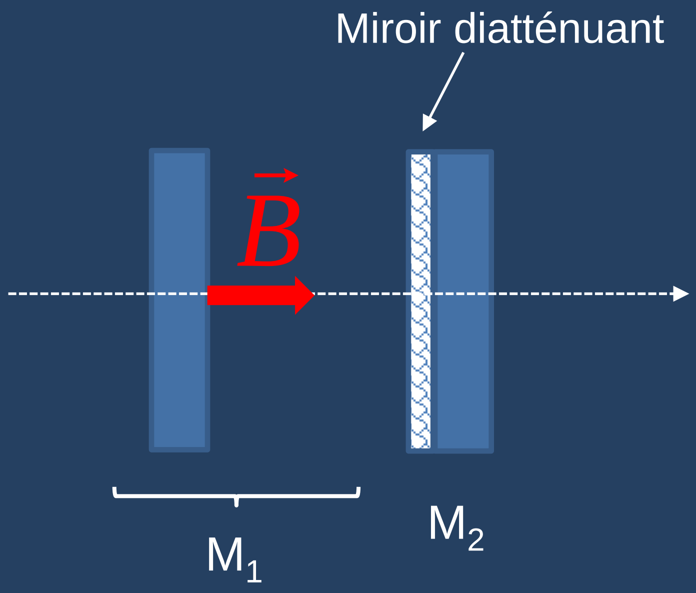
GCMP UNIVERSITÉ DE MONCTON

Peut-on tirer parti de la symétrie PT en physique des lasers?

Deux résonateurs qui présentent cette symétrie.

Deux résonateurs ayant la symétrie PT

1. Résonateur combinant l'effet Faraday et la diatténuation



Caractéristiques du miroir M_2:

- Présence de diatténuation entre les deux axes principaux orthogonaux
- Aucun déphasage

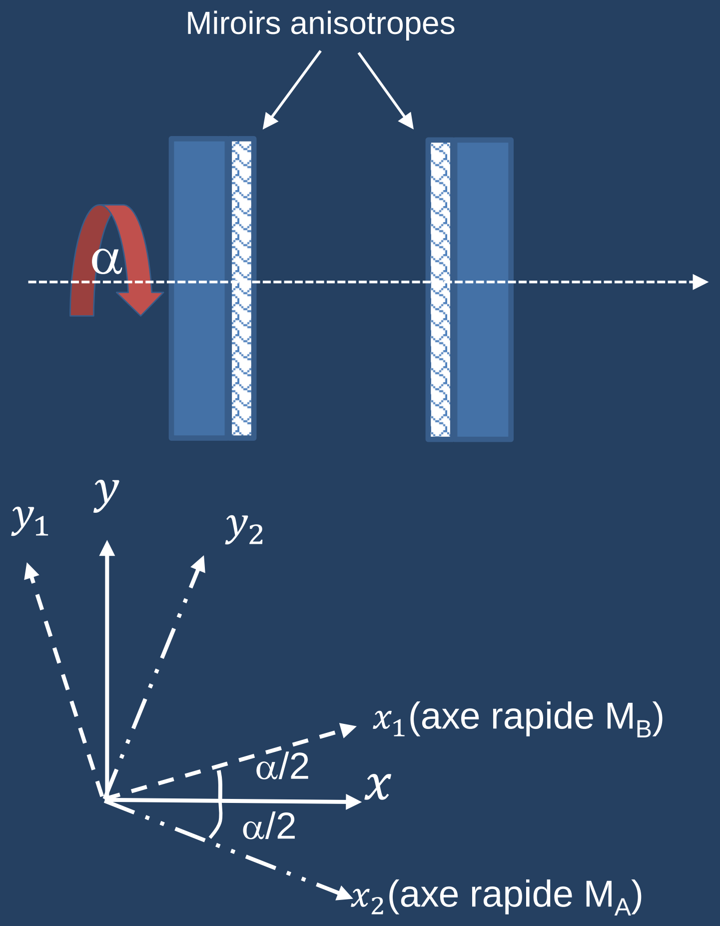
Paramètre de contrôle: le champ magnétique

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & \exp\left(i\varphi(B_z)\right) \\ \exp\left(-i\varphi(B_z)\right) & 0 \end{pmatrix}_{\{g,d\}} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} |r_{21}| & 0 \\ 0 & -|r_{22}| \end{pmatrix}_{\{h,v\}}$$

Matrice d'un aller-retour est PT symétrique: $J_{PT} = M_1 M_2$

Deux résonateurs ayant la symétrie PT (suite)

2. Résonateur torsadé:



Caractéristiques des miroirs anisotropes:

- Axes principaux mutuellement orthogonaux;
- Présence de diatténuation et d'un déphasage de π entre les axes principaux;

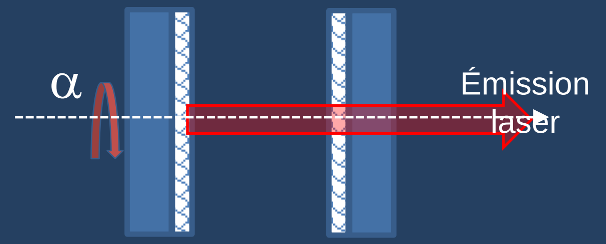
Paramètre de contrôle: l'angle de rotation α

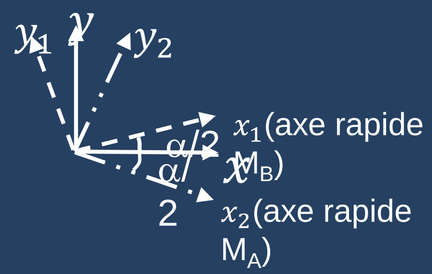
$$M_1 = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{12} \end{pmatrix}_{x_1 y_1} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} r_{21} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix}_{x_2 y_2}$$

$$T(\alpha/2) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) & -\sin(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) & \cos(\alpha/2) \end{pmatrix}_{\{h,v\}}$$

Matrice d'un aller-retour: $J_{PT} = TM_2T\ TM_1T$

Matrice d'un cycle dans un résonateur torsadé





Matrice de Jones d'un aller-retour (exprimée dans la base circ. gauche / circ. droite) :

$$J=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}(r_{21}+r_{22})(r_{11}+r_{12})\exp(2i\alpha)+(r_{21}-r_{22})(r_{11}-r_{12}) & (r_{21}+r_{22})(r_{11}-r_{12})\exp(i\alpha)+(r_{21}-r_{22})(r_{11}+r_{12})\exp(-i\alpha)\\ (r_{21}+r_{22})(r_{11}-r_{12})\exp(-i\alpha)+(r_{21}-r_{22})(r_{11}+r_{12})\exp(i\alpha) & (r_{21}+r_{22})(r_{11}+r_{12})\exp(-2i\alpha)+(r_{21}-r_{22})(r_{11}-r_{12})\end{pmatrix}_{\{g,d\}}$$

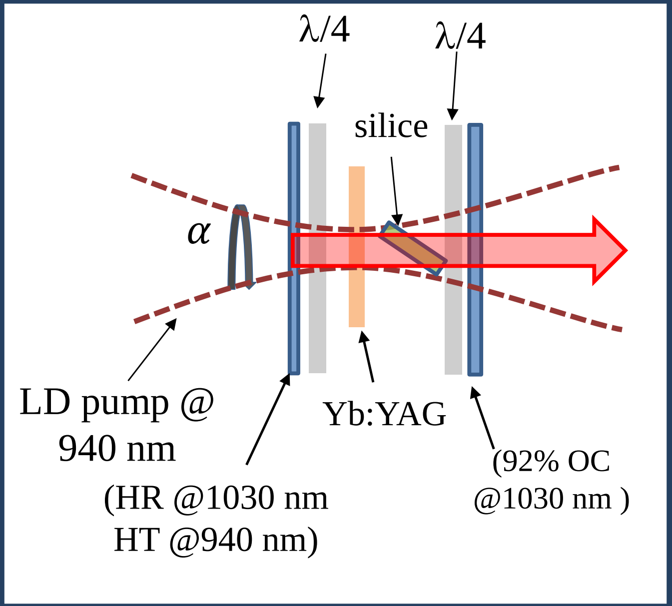
Celui-ci a bien la forme canonique: $J_{PT}=\begin{pmatrix}\beta+i\gamma & \delta+i\eta\\ \delta-i\eta & \beta-i\gamma\end{pmatrix}_{\{g,d\}}$ où $\beta,\delta,\gamma,\eta\in\mathbb{R}$

Le paramètre α peut être utilisé pour balayer la symétrie brisée $\chi\equiv\gamma^2/(\delta^2+\eta^2)>1$ et non brisée ($\chi<1$).

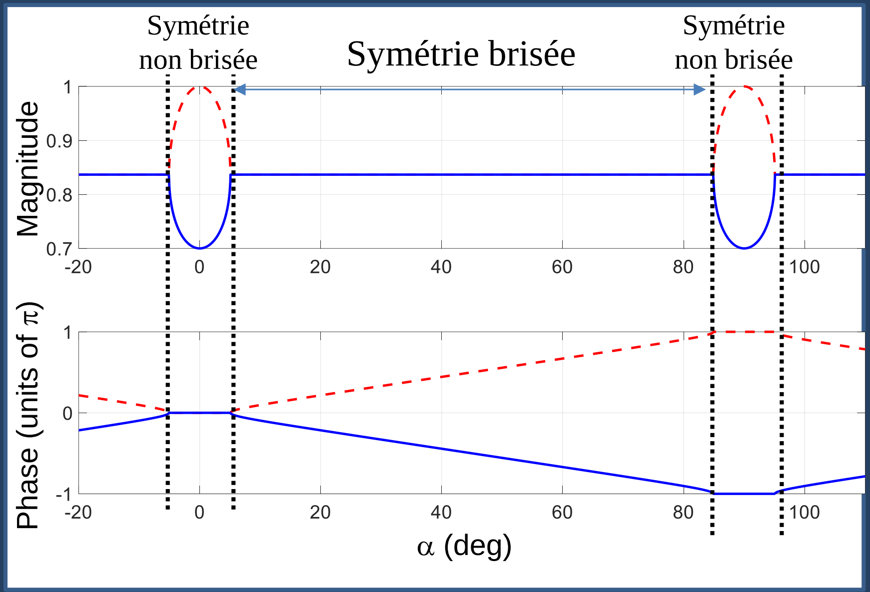
Il existe une valeur critique $\alpha=\alpha_{\mathrm{PE}}$ pour laquelle $\chi=1$. En ce point, on a un PE.

Expériences d'oscillation laser: étude des valeurs propres

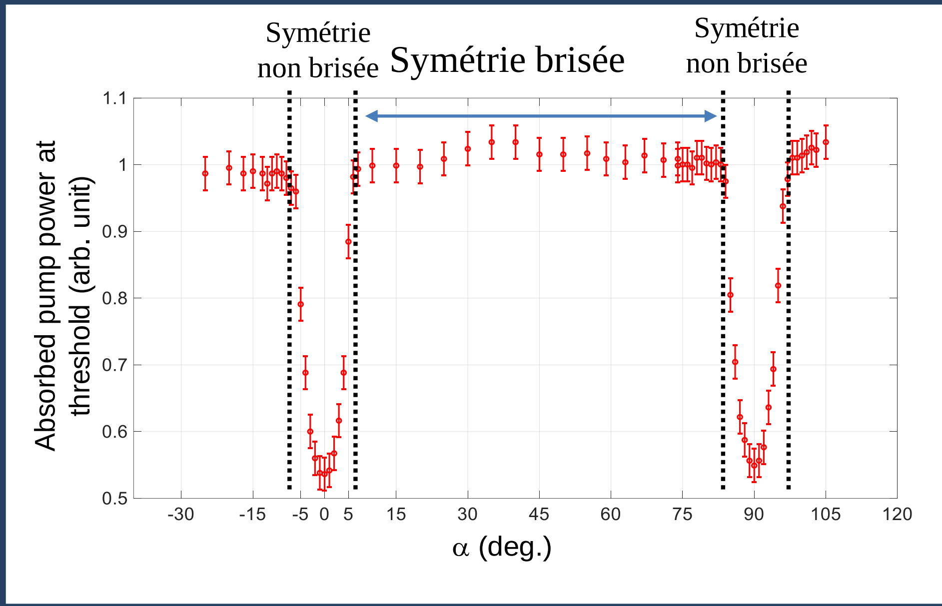
Expérience



Valeurs propres

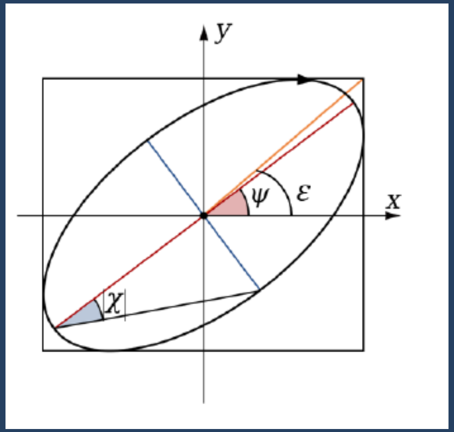


Seuil d'oscillation

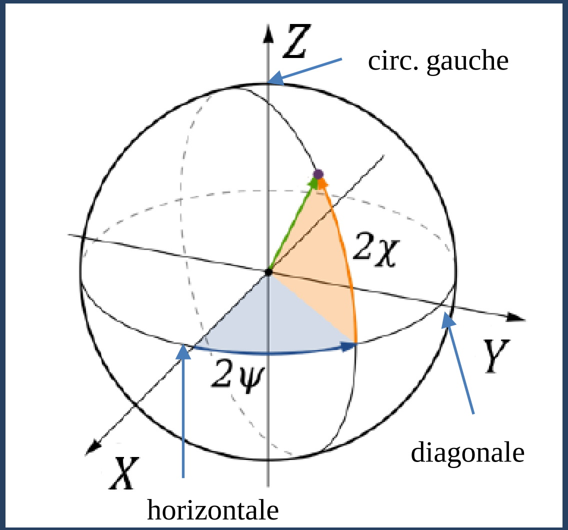


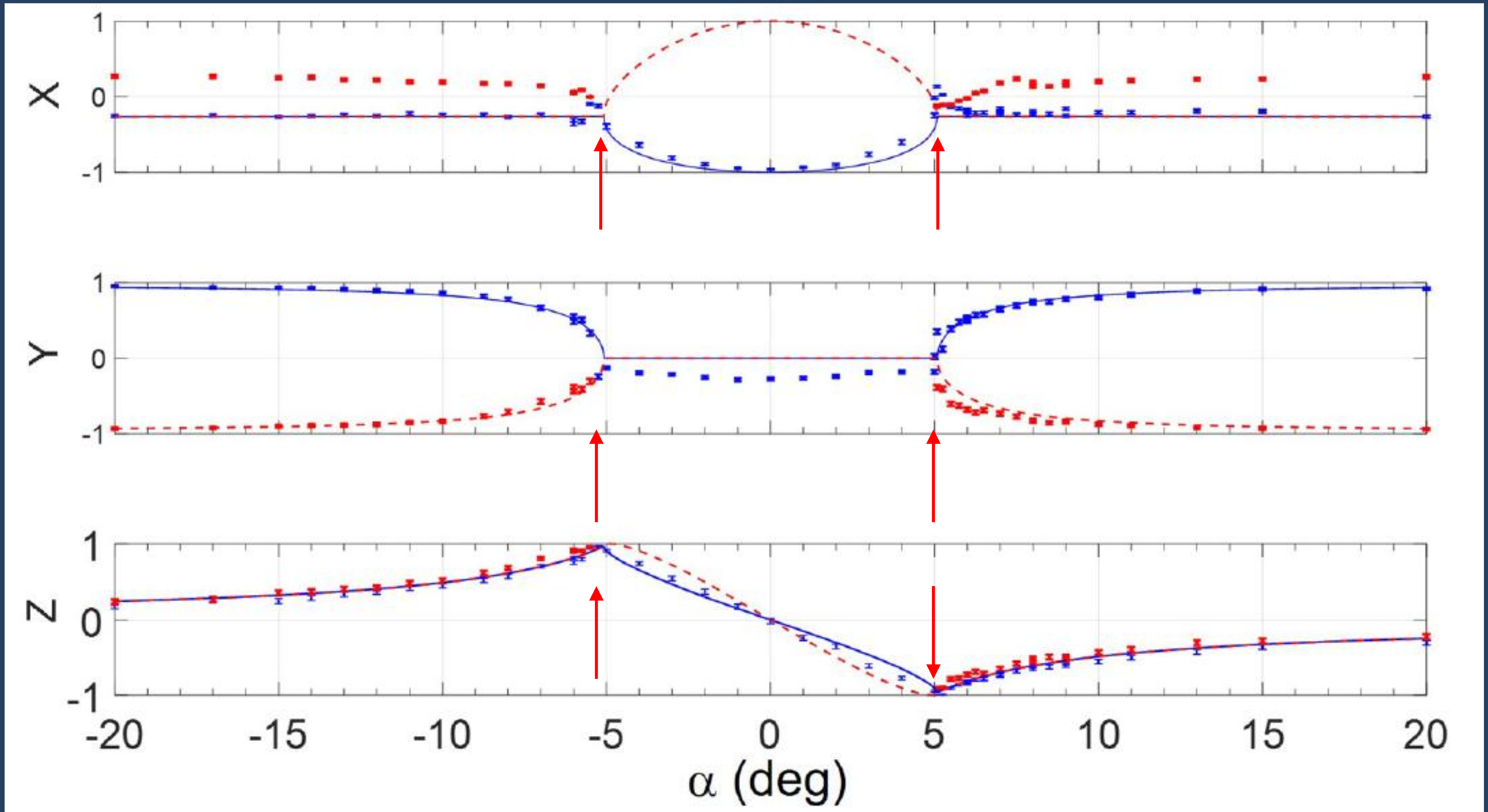
Réf.: Bisson et Nonguierma, Phys.Rev. A,102, 043522, 2020.

Les états propres



La sphère de Poincaré





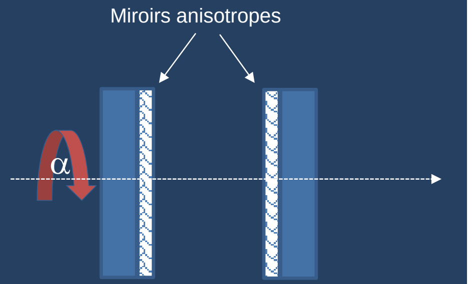
Les états polarisation coalescent à $\alpha_{EP}=\pm 5^{o}$

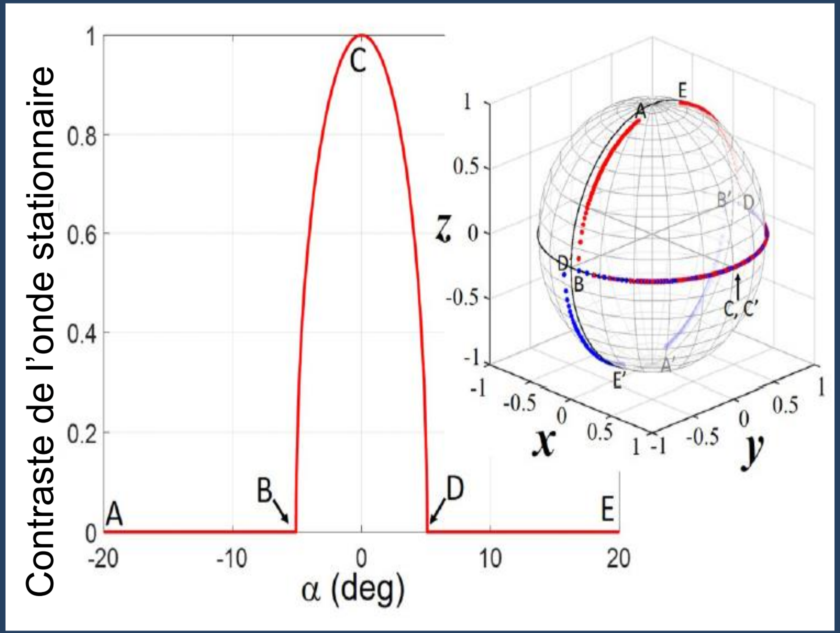
Réf.: Bisson et Nonguierma, Phys.Rev. A,102, 043522, 2020.

GCMP

UNIVERSITÉ DE MONCTON

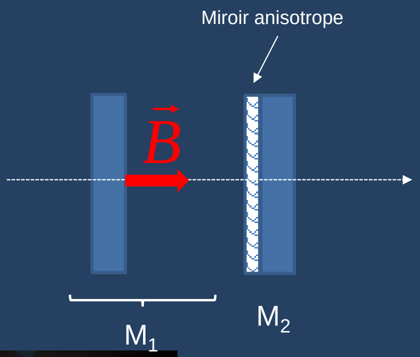
Contraste de l'onde stationnaire

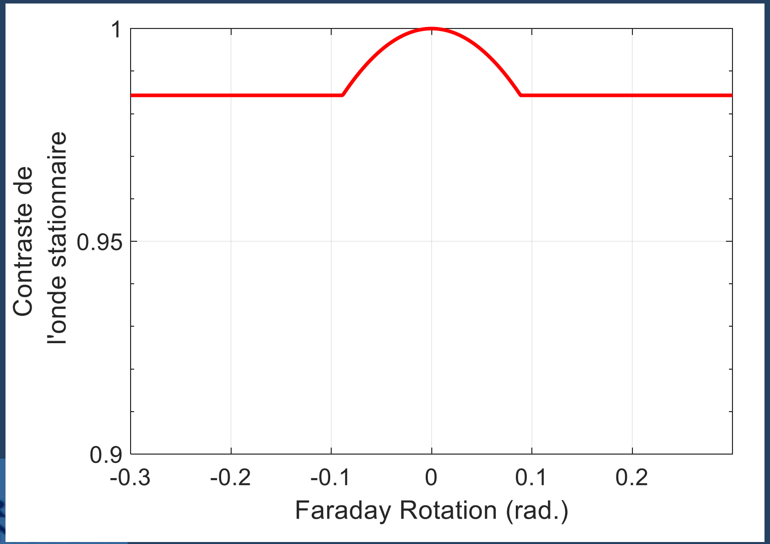




L'élimination du contraste de l'onde stationnaire avec le résonateur torsadé <u>pour la symétrie PT brisée</u> permet une utilisation optimale du gain dans le milieu amplificateur et prévient l'émission dans plusieurs modes.

Réf.: Thèse de Shawn Lapointe; *Nanophotonics*, 2023. https://doi.org/10.1515/nanoph-2022-0783



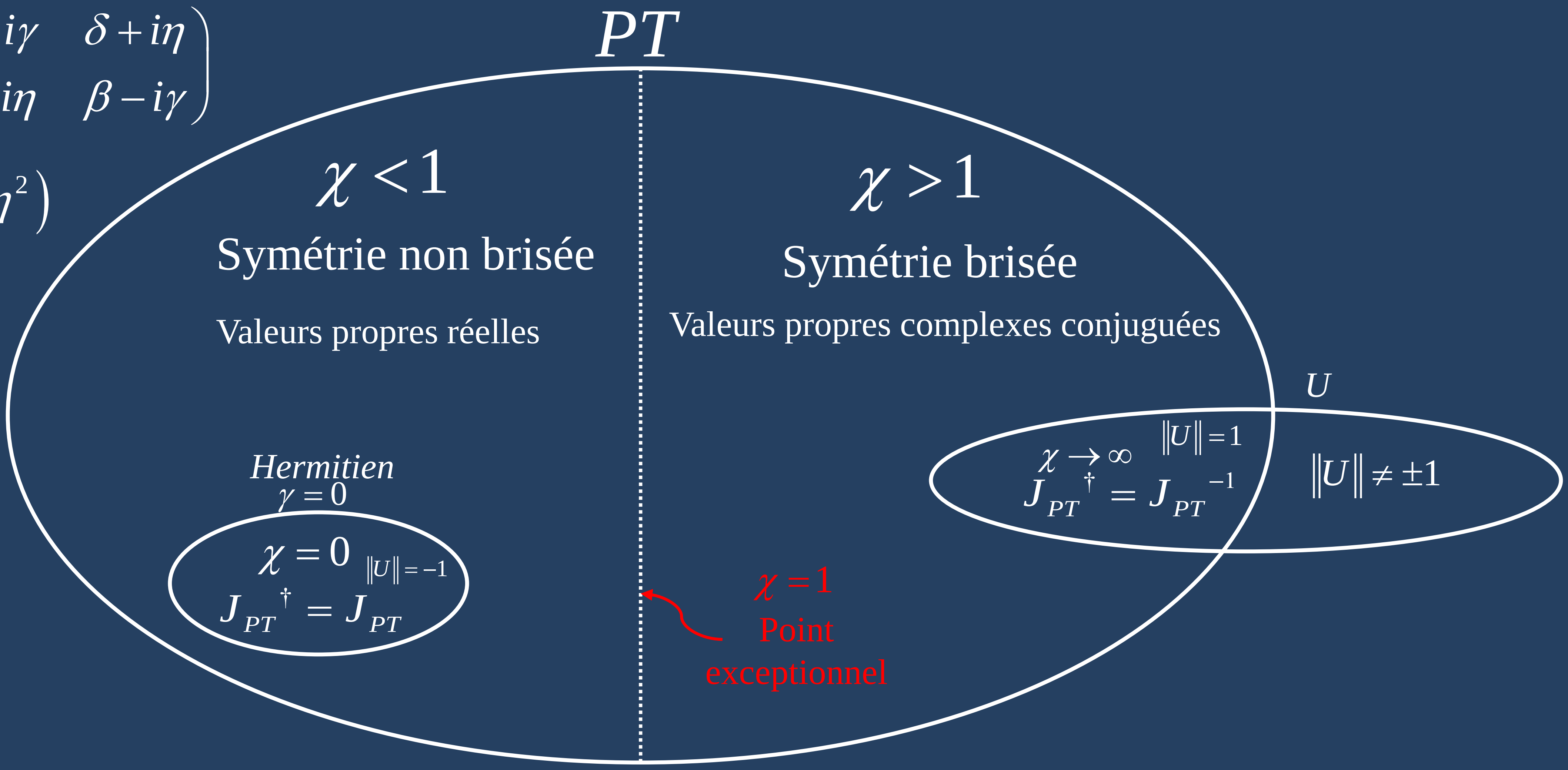


L'élimination du contraste de l'onde stationnaire n'est cependant pas possible avec le résonateur exploitant l'effet Faraday

$$J_{PT\{g,d\}} = \begin{pmatrix} \beta + i\gamma & \delta + i\eta \\ \delta - i\eta & \beta - i\gamma \end{pmatrix}$$

$$\chi \equiv \gamma^2 / \left(\delta^2 + \eta^2\right)$$

Défini en base {g,d}



Les matrices de Jones Hermitiennes (polariseurs) ou unitaires de déterminant unité (lames à retard) sont des cas particuliers de matrice PT-symétriques. Les premières sont associées à $\chi = 0$ et les secondes à $\chi \to \infty$.

Merci pour votre attention!

Analogie entre la propagation de la lumière et la MQ

Éq. de Schrödinger

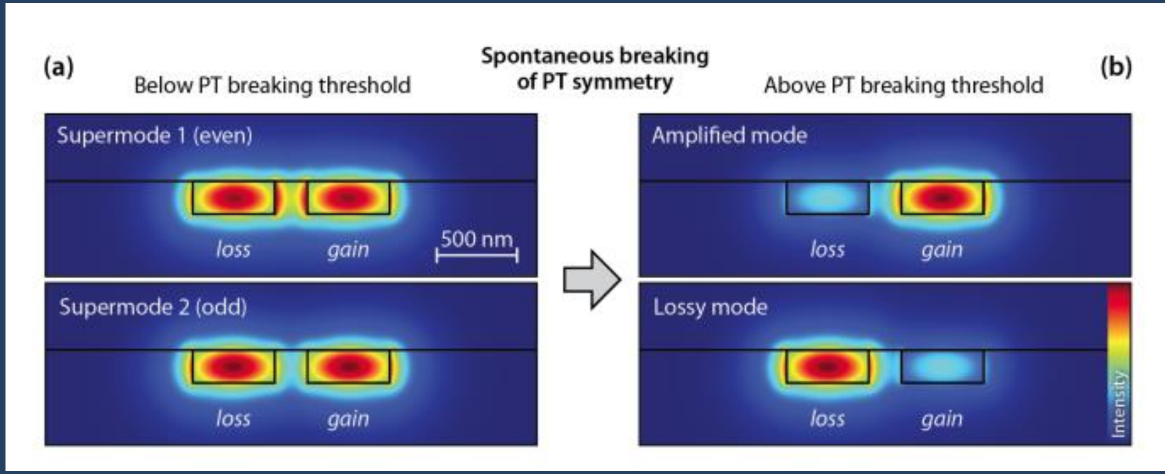
Éq. d'onde paraxiale

$$u \leftrightarrow \psi$$
$$z \leftrightarrow t$$
$$k_0 \leftrightarrow m/\hbar$$
$$\frac{2\pi n(x,y)}{\lambda} \leftrightarrow -V(x,y)/\hbar$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(x)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{-1}{2k_0}\nabla_\perp^{\,2}u - \frac{2\pi}{\lambda_0}\overbrace{n(x,y)}^{n_r(x,y)+i\,n_i(x,y)}u = i\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$[H, PT] = 0 \Rightarrow V(x) = V^*(-x) \quad \longleftrightarrow \quad n(x) = n^*(-x) \Rightarrow \begin{cases} n_r(x) = n_r(-x) \\ n_i(x) = -n_i(-x) \end{cases}$$

Un exemple…



Réf.: Hodaei et al. Science, 346 (6212) 2014

$$n(x) = n^*(-x) \Rightarrow \begin{cases} n_r(x) = n_r(-x) \\ n_i(x) = -n_i(-x) \end{cases}$$

gain pertes

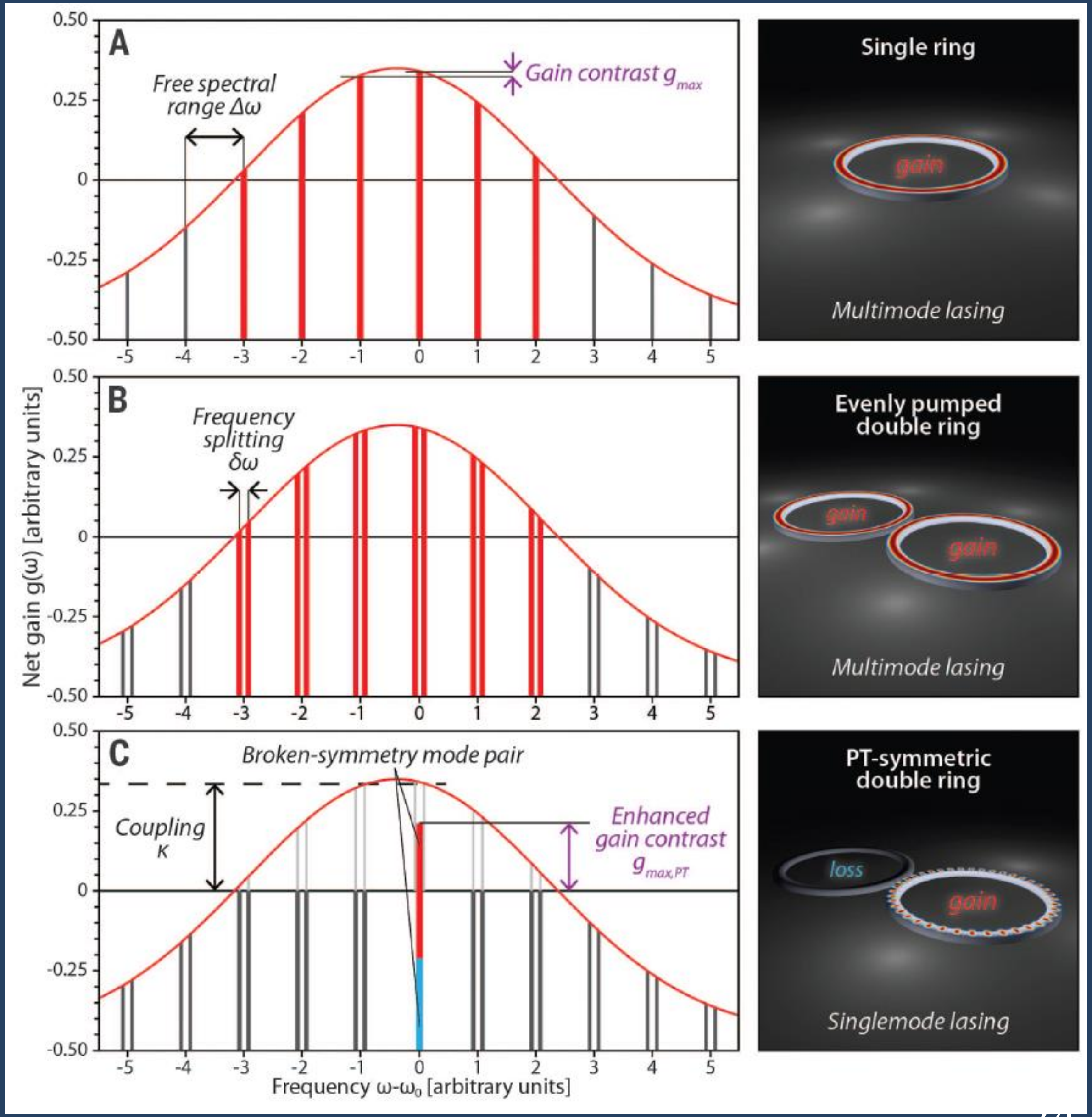
$$\frac{da_n}{dt} = -i\omega_n a_n + i\kappa b_n + \gamma_{a_n} a_n \quad \text{(S1a)}$$

$$\frac{db_n}{dt} = -i\omega_n b_n + i\kappa a_n + \gamma_{b_n} b_n \quad \text{(S1b)}$$

$$\omega_n^{(1,2)} = \omega_n + i\frac{\gamma_{a_n} + \gamma_{b_n}}{2} \pm \sqrt{\kappa_n^2 - \left(\frac{\gamma_{a_n} - \gamma_{b_n}}{2}\right)^2}. \quad \text{(S2)}$$

In the PT-symmetric case, i.e. $\gamma_{a_n} = -\gamma_{b_n} \equiv \gamma_n$, Eq. (S2) simplifies to

$$\omega_n^{(1,2)} = \omega_n \pm \sqrt{\kappa_n^2 - \gamma_n^2}. \quad \text{(S3)}$$



Réf.: Hodaei et al. Science, 346 (6212) 2014

Matrices hermitiennes, unitaires et PT-symétriques

- Les matrices hermitiennes en deux dimensions …
  - non équivalentes par transformations unitaires ont 2 paramètres réels libres.
  - et ont quatre paramètres libres en général:

Toujours PT symétrique

$$H = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$H_g = \begin{pmatrix} A & B+iC \\ B-iC & D \end{pmatrix} \qquad H_g = R^{-1}(\theta,\varphi)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} R(\theta,\varphi)$$

- Les matrices unitaires :
  - non équivalentes ont aussi deux paramètres libres:
  - et quatre paramètres en général:

$$U = \exp(i\alpha)\begin{pmatrix} \beta+i\gamma & 0 \\ 0 & \beta-i\gamma \end{pmatrix} \qquad \beta^2+\gamma^2=1$$

$$U_g = \exp(i\alpha)\begin{pmatrix} \beta+i\gamma\cos\theta & -i\gamma\sin\theta\exp(-i\varepsilon) \\ -i\gamma\sin\theta\exp(i\varepsilon) & \beta-i\gamma\cos\theta \end{pmatrix}$$

PT symétrique si alpha est un multiple de pi/2. Quand alpha est un multiple de pi, delta et eta sont nuls Chi tend vers l'infini
Quand alpha vaut +-pi/2, (on doit avoir beta=0: vraiment?) et U devient alors hermimitque aussi

$$U_g = \begin{pmatrix} 0 & \pm\gamma\exp(-i\varepsilon) \\ \pm\gamma\exp(i\varepsilon) & 0 \end{pmatrix}$$

- Les matrices PT-symétriques en deux dimensions
  - non équivalentes ont 4 paramètres réel libres:
  - et 6 paramètres en général:

$$J_{PT} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad J_{PT\{g,d\}} = \begin{pmatrix} \beta+i\gamma & \delta+i\eta \\ \delta-i\eta & \beta-i\gamma \end{pmatrix} \qquad \chi \equiv \gamma^2 / \left(\delta^2+\eta^2\right)$$

$$J_{PT} = \begin{pmatrix} A+B\cos\theta-iC\sin\theta & (B\sin\theta+iC\cos\theta+iD)\exp(-i\varphi) \\ (B\sin\theta+iC\cos\theta-iD)\exp(i\varphi) & A-B\cos\theta+iC\sin\theta \end{pmatrix}$$

GCMP UNIVERSITÉ DE MONCTON