

## Chapitre 11

### La saturation du milieu amplificateur [1]

*Objectifs spécifiques :*

- 1) *Connaître et comprendre la définition d'un milieu à élargissement homogène;*
- 2) *comprendre l'évolution de la courbe de gain d'un milieu homogène en fonction du taux de pompage pour  $r < 1$  et  $r \geq 1$ , en incluant les effets de saturation et comprendre l'origine physique de la saturation de la courbe de gain;*
- 3) *connaître et comprendre la définition d'un milieu à élargissement inhomogène;*
- 4) *connaître des exemples de milieux à élargissements homogènes ou inhomogènes;*
- 5) *comprendre l'origine physique des largeurs homogène et inhomogène d'un milieu gazeux;*
- 6) *comprendre l'effet de la pression (dans le cas gazeux) et de la température sur les largeurs homogène et inhomogène d'un milieu actif;*
- 7) *comprendre l'origine physique de la saturation locale de la courbe de gain dans un milieu inhomogène;*
- 8) *comprendre qualitativement comment évolue la population de l'état excité et le gain saturé d'une population inhomogène d'ions soumis à une onde saturante monochromatique;*
- 9) *pouvoir expliquer pourquoi un milieu à élargissement inhomogène peut avoir une émission multimode et pourquoi cette caractéristique diffère du cas d'un milieu à élargissement homogène;*
- 10) *pouvoir expliquer la notion de creusement spatial dans un résonateur à onde stationnaire;*
- 11) *pouvoir expliquer en détails, mais qualitativement, pourquoi le creusement spatial permet à un milieu à élargissement homogène d'émettre dans plusieurs modes en même temps;*
- 12) *connaître trois méthodes pour supprimer l'effet du creusement spatial afin d'obtenir un laser monomode longitudinal.*

Au chapitre précédent, nous avons considéré un milieu amplificateur placé dans un résonateur. À l'aide d'un modèle simple, nous avons établi un système couplé de deux équations différentielles du premier ordre décrivant l'évolution dans le temps de l'inversion de population et du nombre de photons dans le mode dominant du résonateur (éq. 10.20-21). Plusieurs caractéristiques des lasers peuvent être capturées en résolvant ce système d'équations, telles que le nombre moyen de photons et d'atomes excités en régime stationnaire ou encore les oscillations de relaxation. En résolvant les équations en régime stationnaire, on voit apparaître une transition abrupte dans la distribution de photons dans les différents modes pour un taux de pompage bien défini  $r=1$ , qu'on appelle le seuil d'oscillation. En bas du seuil,  $r < 1$ , la population de l'état excité croît linéairement avec  $r$  alors que le nombre de photons sont répartis dans un très grand nombre de modes. Arrivé au seuil,  $r = 1$ , le taux de création de photons par émission stimulée dans un des modes du résonateur devient égal à leur taux de fuite du résonateur.

Au-dessus du seuil,  $r > 1$ , ce taux de création de photons est au départ plus grand que le taux de fuite du résonateur mais, à mesure que le nombre de photons augmentent dans le résonateur, la population de l'état excité s'ajuste pour atteindre une valeur limite qui équilibre les taux de génération et de fuite. La population de l'état excité demeure alors constante en fonction du taux de pompage pour  $r > 1$ , quelle que soit la valeur de  $r$ , et la très grande majorité des photons sont émis dans le même mode, appelé le mode dominant : c'est l'oscillation laser, où la population de l'état excité reste fixe et toute énergie additionnelle fournie par la pompe est utilisée pour générer des photons dans ce mode. Cette situation est illustrée aux Fig. 10.10 et 10.11. Lorsque le rayonnement laser affecte la population de l'état excité (ce qui est le cas pour  $r > 1$  sinon l'inversion de population continuerait d'augmenter avec  $r$ ), on parle de "saturation" du milieu amplificateur, qui est le sujet abordé dans ce chapitre.

Une autre différence importante entre les situations *sous le seuil* et *au-dessus du seuil* est que, dans le premier cas, les photons émis sont répartis dans un très grand nombre,  $\beta$ , de modes qui chevauchent la courbe de fluorescence du milieu laser (y compris les modes qui n'appartiennent pas au résonateur), alors que dans le second, les photons se concentrent dans le mode dominant, celui qui oscille. Cette situation est

illustrée à la Fig. 12 du chapitre 10. Il semble donc qu'un laser a une propension à émettre dans un seul mode. Dans ce chapitre, nous allons en montrer les raisons. Cependant, en pratique il arrive que l'émission laser se fasse néanmoins dans plusieurs modes (on parle alors d'émission *multimode*); nous allons voir que la distribution spatiale de la saturation du gain dans le milieu amplificateur ou encore la distribution statistique de la réponse spectrale au sein d'une famille d'ions ou d'atomes luminescents en sont les deux causes principales. Nous allons ainsi faire une distinction entre l'inhomogénéité de la réponse spectrale d'une population d'atomes placés dans un état excité et l'inhomogénéité de la distribution spatiale du gain. Dans le premier cas, nous parlerons d'élargissement inhomogène de la courbe de gain; dans le second cas, nous parlerons de *creusement spatial* dans la distribution de gain d'un milieu amplificateur.

### 11.1 Saturation d'un milieu amplificateur homogène

Un milieu amplificateur est dit *homogène* si tous les centres luminescents ont les mêmes propriétés spectrales, c'est-à-dire la même section efficace et la même forme de raie pour une polarisation et une direction données des photons émis. Ceci se produit si tous les atomes sont non seulement identiques mais aussi placés dans un environnement identique de sorte que la position des niveaux d'énergie et l'élargissement de la raie d'émission laser sont les mêmes. *Dans un milieu à élargissement homogène, le spectre d'émission d'une population d'atomes excités sera alors le même que pour un seul atome.* La courbe de gain sera proportionnelle à l'inversion de population, comme le montre l'équation de Füchtbauer-Ladenburg (éq. 6.19). Le coefficient de gain, en  $\text{m}^{-1}$ , est défini comme le négatif de l'absorption, qui s'écrit pour un système à quatre niveaux idéal comme:

$$\text{gain} \equiv -\alpha \cong N_2 \sigma_e(\nu) = \frac{N_2}{\tau_{rad}} \frac{c^2}{8\pi n^2 \nu^2} g(\nu), \quad (1)$$

où  $N_2$  est la densité de population de l'état excité. Cette dernière est donnée par l'équation 10.11 :

$$N_2 = \frac{N_{20}}{1 + \frac{I_s}{I_{sat}}} = \frac{R_p \tau_2}{1 + \frac{I_s}{I_{sat}}}. \quad (10.11)$$

Rappelons que dans le cadre du modèle à quatre niveaux idéal étudié du chapitre 10, le niveau bas (désexcité) de la transition se dépeuple quasi-instantanément de sorte qu'il est vide.

Considérons l'évolution du gain en fonction du taux de pompage normalisé,  $r$ . Étant donné que  $N_2$  est proportionnel à  $r$  en-dessous du seuil (Cf. Fig. 10.10), on obtient alors une augmentation linéaire de la hauteur de la courbe de gain avec  $r$ , sans modification de sa forme, jusqu'à ce que le seuil soit atteint pour l'un des modes du résonateur; ce mode sera généralement celui à une fréquence où le gain est le plus élevé (à moins que les pertes soient différentes pour différents modes; dans ce cas, le premier mode dont le gain atteint le niveau des pertes va osciller). Le seuil est atteint à  $r=1$ , i.e., quand le taux de création de photons par émission stimulée dans ce mode devient égal au taux de fuite des photons du résonateur (Cf. question 9, chap. 10). Pour  $r > 1$ , la population  $N$  ne change plus : ceci implique que le gain ne change pas non plus avec  $r$ . Cette situation est illustrée à la Fig. 1. Pour le mode dominant, le gain sera égal aux pertes. *Par contre, tous les autres modes qui chevauchent la raie d'émission auront un gain inférieur aux pertes totales dans un aller-retour dans le résonateur, c'est-à-dire un taux de fuite des photons plus élevé que le taux d'émission stimulée.* On note à la Fig. 1b que le nombre de photons dans le mode qui oscille à la fréquence normalisée 0 est de l'ordre de  $\beta \gg 1$ , mais qu'il n'est que de l'ordre de l'unité pour les autres modes car, pour ceux-ci, le gain est inférieur aux pertes. On s'attend donc à ce que la quasi-totalité des photons émis par un milieu amplificateur homogène au-dessus du seuil d'oscillation soient dans un seul et unique mode [2].

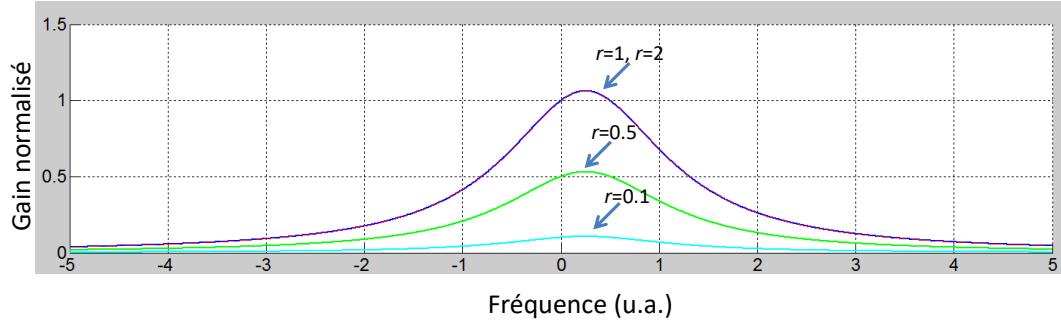


Fig. 1a. Illustration d’une courbe de gain normalisée par les pertes pour différentes valeurs de  $r$ . Le gain pour un milieu homogène garde toujours la même forme et reste bloqué dès qu’un mode atteint le seuil d’oscillation,  $r=1$ , ici la fréquence 0. Les entiers sur l’échelle de fréquence correspondent à différentes fréquences de résonance du résonateur. Toutes les autres fréquences admises ont un gain inférieur aux pertes.

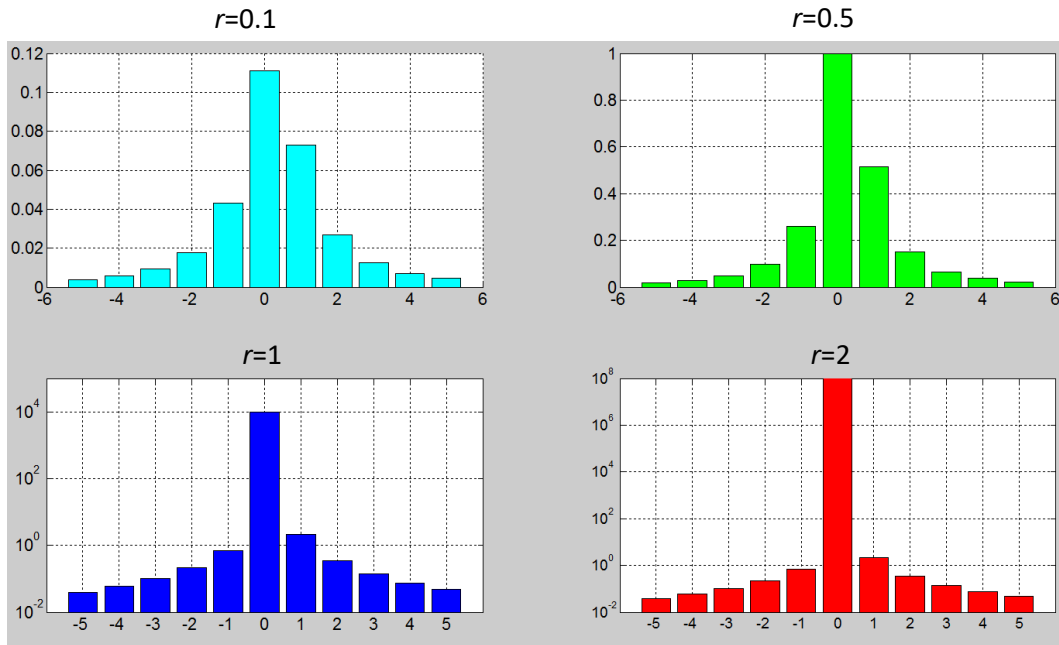


Fig. 1b. Distribution du nombre de photons pour chaque mode d’un résonateur pour différentes valeurs du taux de pompage  $r$ , pour  $\beta = 10^8$  pour les courbes de gain montrées à Fig. 1a. Le niveau des pertes dans le résonateur est le même pour tous les modes. Le nombre de photons, de l’ordre de l’unité pour les modes qui restent en dessous du seuil, devient en revanche très grand pour le premier mode qui atteint le seuil d’oscillation. Noter l’utilisation de l’échelle verticale logarithmique pour  $r=1$  et  $r=2$ .

## 11.2 Saturation d'un milieu amplificateur inhomogène.

### 11.2.1 Définition d'un élargissement inhomogène

Certains milieux amplificateurs sont composés d'une population de centres luminescents n'ayant pas tous la même réponse spectrale. La réponse spectrale collective de cette population est alors plus large que celle d'un seul atome. On parle d'un milieu inhomogène si la largeur homogène d'un centre est plus petite que la dispersion de fréquences d'émission associées à la population d'atomes du milieu considéré.

### 11.2.2 Exemples de milieux amplificateurs à élargissement inhomogène.

Exemple 1 : certains lasers à gaz comme He-Ne ou Ar<sup>+</sup>.

Plusieurs lasers à gaz ont un spectre d'émission élargi par effet Doppler [3] résultant de la distribution de vitesse des atomes. La distribution statistique des vitesses au sein d'un groupe d'atomes en phase gazeuse introduit une distribution de la fréquence centrale d'émission vue par un observateur au repos. Un photon émis dans la direction du vecteur d'onde  $\vec{k}$  à la fréquence  $\nu_0$  dans le référentiel d'un atome ayant un vecteur vitesse  $\vec{u}$  sera perçu par un observateur au repos comme ayant une fréquence :

$$\nu = \nu_0 \left( 1 + \frac{\vec{u} \cdot \hat{k}}{c} \right), \quad (2a)$$

où  $\hat{k} = \vec{k}/k$  [4]. Dans un résonateur, les photons participant à l'émission dans un mode d'émission longitudinal sont émis dans l'une ou autre direction de l'axe du résonateur, pris ici comme l'axe z. La fréquence apparente du photon perçue par un observateur au repos regardant le résonateur dans la direction négative de l'axe, s'écrit alors:

$$\nu = \nu_0 \left( 1 + \frac{u_z}{c} \right), \quad (2b)$$

Pour un grand nombre d'ions qui se désexcitent, l'observateur voit un spectre de luminescence élargi par l'effet Doppler à cause de la distribution statistique de Maxwell des vitesses, donnée par :

$$f(u_x, u_y, u_z) = C \exp\left(-\frac{m}{2k_B T} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\right), \quad (3)$$

où  $C$  est une constante de normalisation. Il s'ensuit une distribution normale des fréquences d'émission donnée par :

$$g_{inh}(\nu) = C' \exp\left(-\frac{mc^2}{2k_B T \nu_0^2} (\nu - \nu_0)^2\right), \quad (4)$$

où  $C'$  est une constante de normalisation à déterminer. Nous avons supposé à l'équation (4) que les atomes émettaient tous, dans leur référentiel propre, à une seule et même fréquence  $\nu_0$  donnée par l'équation (2b). En fait, la durée finie des temps de vie et les collisions introduisent une forme de raie Lorentzienne de largeur  $\Delta\nu_{\text{hom}}$ , mais, pour le laser hélium-néon ou à ions d'argon, cette largeur est faible par rapport à la largeur Doppler trouvée avec l'équation (4) de sorte que l'expression (4) représente très bien la forme de raie mesurée expérimentalement.

Maintenant, les photons émis à une fréquence quelconque  $\nu$  ne pourront créer l'émission stimulée que pour des atomes ayant à peu près la même valeur de la composante de la vitesse dans la direction  $z$  que l'atome qui a émis ce photon; en effet, les autres classes d'atomes verront une fréquence apparente différente de  $\nu_0$  et n'interagiront pas avec ces photons. La saturation de la population excitée apparaîtra séparément pour chaque classe de vitesses.

#### Exemple 2 : matrices solides amorphes ou désordonnées

Certains matériaux lasers à l'état solide peuvent aussi avoir un élargissement inhomogène en raison de la diversité des configurations atomiques associées à différents sites de substitution possibles pour les ions luminescents : les niveaux d'énergie de l'ion diffèrent d'un site à l'autre. Les ions de terres rares dans

les matrices amorphes, e.g., verre, produisent très souvent un élargissement spectral de nature hétérogène. Certains matériaux cristallins ayant plusieurs sites différents dans lesquels l'ion peut se loger produiront aussi des spectres d'émission à élargissement inhomogène.

### 11.2.3 Effet de la température

Pour la plupart des matériaux luminescents utilisés dans les lasers, l'abaissement de la température tend à réduire la largeur homogène sans modifier de manière appréciable la dispersion de fréquences d'émission au sein de la population d'atomes; ainsi, un milieu pourra apparaître inhomogène à basse température et homogène à haute température. Par exemple, on montre à la Fig. 2 les largeurs spectrales du Rubis ( $\text{Cr}^{3+}:\text{Al}_2\text{O}_3$ ) et du Nd:YAG ( $\text{Nd}^{3+}:\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ ) en fonction de la température. Dans le cas du rubis, les interactions des ions avec les phonons du réseau cristallin produisent un élargissement homogène, i.e., identique pour tous les ions; les hétérogénéités cristallines produisent quant à elles un environnement local différent pour différents ions, produisant une dispersion de la fréquence centrale d'émission au sein d'un groupe d'ions, qui produit un élargissement de type inhomogène. L'élargissement total résulte du produit de convolution de ces deux effets; à basse température, l'élargissement hétérogène domine, alors qu'à plus haute température, i.e., au-dessus d'environ 100 K, le matériau a un élargissement homogène.

### 11.2.4 Effet de la pression dans un laser à gaz

Un phénomène similaire existe en fonction de la pression pour un milieu actif gazeux : l'augmentation de la pression, à température constante, contribue à augmenter la largeur homogène d'une raie de transition en raison de l'augmentation du taux de collision, i.e., une diminution de la constante de temps  $T$  (Cf. chap. 9), sans modifier l'élargissement par effet Doppler, qui lui ne dépend que de la distribution de vitesse via la température et la masse de l'atome, Cf. éq. 4. Les Figures 3 et 4 montrent des résultats expérimentaux de l'effet de la pression sur le coefficient d'absorption et la largeur de la fonction forme de raie.



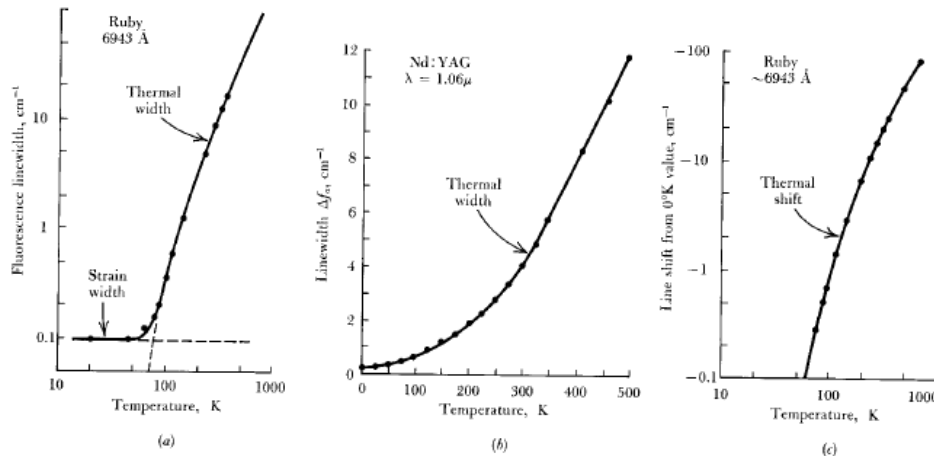


FIGURE 3.5 Phonon broadening and resonance frequency shifting versus temperature in two solid-state laser materials. (From D. E. McCumber and M. D. Sturge, *J. Appl. Phys.* **34**, 1682, June 1963.)

Fig. 2 Exemples d'élargissement spectral du Rubis  $\text{Cr}^{3+}:\text{Al}_2\text{O}_3$  (gauche) et du  $\text{Nd}^{3+}:\text{YAG}$  en fonction de la température [5].

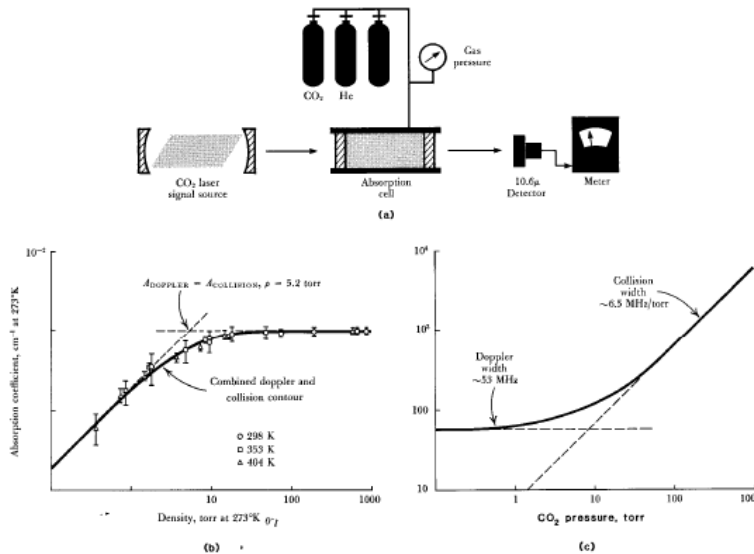


FIGURE 3.20 (a) Apparatus using a tunable  $\text{CO}_2$  laser to measure absorption versus frequency in a variable-pressure  $\text{CO}_2$  cell. (b) Midband (peak) absorption versus gas pressure; and (c) linewidth versus pressure in a typical He:Ne: $\text{CO}_2$  mixture, showing changeover from doppler broadening at low pressures to pressure (collision) broadening above about 10 torr total pressure. (Data from E. T. Gerry and D. A. Leonard, *Appl. Phys. Lett.* **8**, 227, May 1, 1966.)

Fig. 3 Exemple de transition d'un élargissement inhomogène à un élargissement homogène en fonction de la pression pour le  $\text{CO}_2$ . À gauche : effet de la pression sur le coefficient d'absorption; ce dernier sature lorsque l'élargissement devient homogène. À droite : à basse pression, la largeur de raie est constante, ce qui indique que la largeur Doppler domine, alors qu'à plus haute pression, la largeur de raie s'accroît avec la pression, indiquant alors un mécanisme d'élargissement homogène lié aux collisions [6].

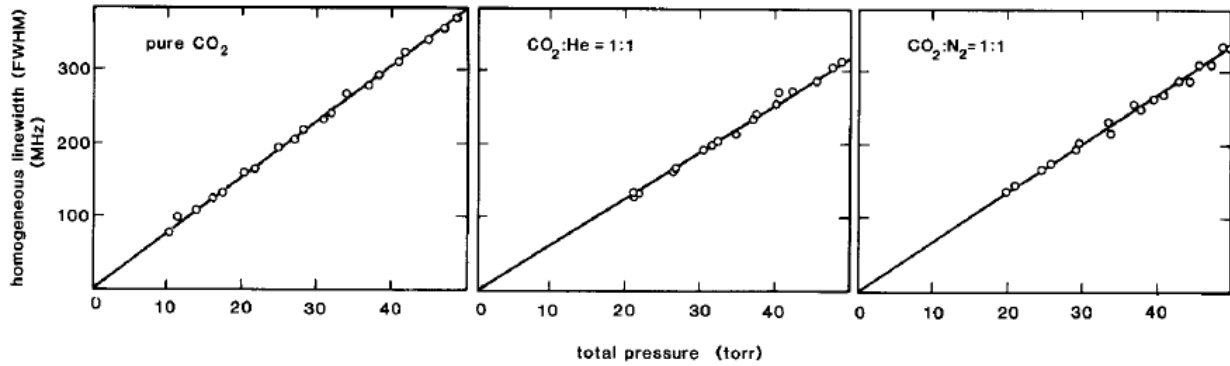


FIGURE 3.4

Pressure broadening of the CO<sub>2</sub> laser transition in various gas mixtures. (Adapted from R. L. Abrams, *Appl. Phys. Lett.* 25, 609–611, November 15, 1974.)

Fig. 4. Élargissement de la courbe de gain d'un laser CO<sub>2</sub> en fonction de la pression du mélange gazeux. Cette figure montre que l'augmentation de la pression contribue à accroître la largeur de la raie à cause du taux de collision qui augmente. On a donc affaire à un milieu à élargissement homogène pour la gamme de pressions étudiées [7]. À noter qu'à pression donnée, l'élargissement  $\Delta\nu_{\text{hom}}$  n'est plus le même pour les différents mélanges; en effet,  $\Delta\nu_{\text{hom}}(\text{CO}_2) > \Delta\nu_{\text{hom}}(\text{CO}_2:\text{N}_2) > \Delta\nu_{\text{hom}}(\text{CO}_2:\text{He})$ . Pouvez-vous expliquer pourquoi?

### 11.3 Creusement spectral d'une population inhomogène d'ions ou d'atomes luminescents

Dans le cas d'un milieu à élargissement inhomogène, seules les populations d'atomes dont la fréquence de résonance est proche (à l'échelle de la largeur de raie homogène) de celle d'un mode d'oscillation du résonateur subira la saturation du milieu amplificateur. La saturation permet d'équilibrer le gain et les pertes. Pour les populations dont la fréquence d'émission est assez différente de celles des modes de résonance du résonateur, la population excitée de ces classes d'atome peut prendre des valeurs qui ne sont pas limitées par le phénomène de saturation. En l'occurrence, le gain peut être très supérieur aux pertes car le nombre de photons dans le résonateur est insuffisant pour causer une saturation appréciable de la population de l'état excité. Considérons une population d'ions luminescents dont la fréquence d'émission centrale est distribuée statistiquement selon la loi de densité de probabilité  $P(\nu')$ .  $N_2 P(\nu') d\nu'$  est la densité d'ions excités dont la fréquence de résonance centrale est située entre  $\nu'$  et  $\nu' + d\nu'$  et  $N_2$  est la densité totale

d'ions excités de toutes les classes de fréquences.  $\sigma_e(\nu - \nu')$  est la section efficace d'une classe d'ions, dont l'émission est centrée en  $\nu'$ , en fonction de  $\nu$ . On suppose ici que le spectre de section efficace prend une forme identique, à un décalage en fréquence près du spectre d'émission, pour toutes les classes d'ions (par exemple, l'équation (6)). La contribution au coefficient d'amplification  $-\mathrm{d}\alpha_0$  non saturé de cette classe d'ions à la fréquence  $\nu$  sera donnée par :

$$-\mathrm{d}\alpha_0(\nu) = N_{20} P(\nu') \sigma_e(\nu - \nu') \mathrm{d}\nu', \quad (5a)$$

où  $N_{20}$  désigne la densité total d'ions en l'absence d'onde saturante. Le coefficient d'amplification non saturée sera donné par :

$$-\alpha_0(\nu) = N_{20} \int P(\nu') \sigma_e(\nu - \nu') \mathrm{d}\nu'. \quad (5b)$$

Le coefficient d'amplification non-saturée s'exprime par un produit de convolution. Dans la suite, on suppose que la section efficace de cette classe d'ions à la fréquence  $\nu$  est de forme Lorentzienne :

$$\sigma_e(\nu - \nu') = \frac{\sigma_0}{1 + \left( (\nu - \nu') / \Delta\nu_{\text{hom}} \right)^2}, \quad (6)$$

où  $\Delta\nu_{\text{hom}}$  est la demi-largeur à mi-hauteur,  $\sigma_0$  la valeur maximale de la section efficace, supposée la même pour tous les ions, quelle que soit leur fréquence de résonance. Notons que, si  $P$  a une forme Lorentzienne,  $\alpha_0$  aura aussi une forme Lorentzienne. Si  $P$  a une forme gaussienne,  $\alpha_0(\nu)$  ne prend pas une forme en termes de fonctions élémentaires mais cette distribution porte le nom de "profil de Voigt" [8]. Nous utilisons la définition usuelle de l'intensité saturante à la fréquence  $\nu$  de l'onde saturante pour une classe d'atomes centrée sur  $\nu'$ :

$$I_{\text{sat}}(\nu', \nu) = \frac{h\nu}{\sigma_e(\nu - \nu') \tau_{\text{rad}}}. \quad (7)$$

Supposons maintenant que ces ions soient soumis à un rayonnement monochromatique à la fréquence  $\nu$  d'intensité  $I_s(\nu)$ . Nous définissons le paramètre de saturation :

$$\chi \equiv I_s(\nu) / I_{sat \min}, \quad (8)$$

$$\text{où } I_{sat \min} = \frac{h\nu}{\sigma_0 \tau_{rad}}. \quad (9)$$

Les classes d'ions dont la fréquence de résonance est proche de  $\nu$  verront la population de leur état excité réduite alors que les classes d'ions dont la fréquence de résonance est plus éloignée de  $\nu$  ne seront presque pas affectées. Le rayonnement d'intensité  $I_s(\nu)$  creusera donc un trou dans la population d'ions excités autour de la fréquence  $\nu$ . En utilisant les éq. 6 à 9, la densité de population par unité de volume et de fréquence de résonance  $\nu'$  est alors donnée par:

$$\frac{dN_2}{d\nu'}(\nu') = N_{20} \frac{P(\nu')}{1 + I_s(\nu) / I_{sat}(\nu', \nu)} = N_{20} \frac{P(\nu')}{1 + \frac{\chi}{1 + (\nu - \nu' / \Delta\nu_{\text{hom}})^2}}. \quad (10)$$

Cette fonction peut être calculée numériquement et est montrée à la Fig. 5 pour différentes valeurs du paramètre  $\chi$ .

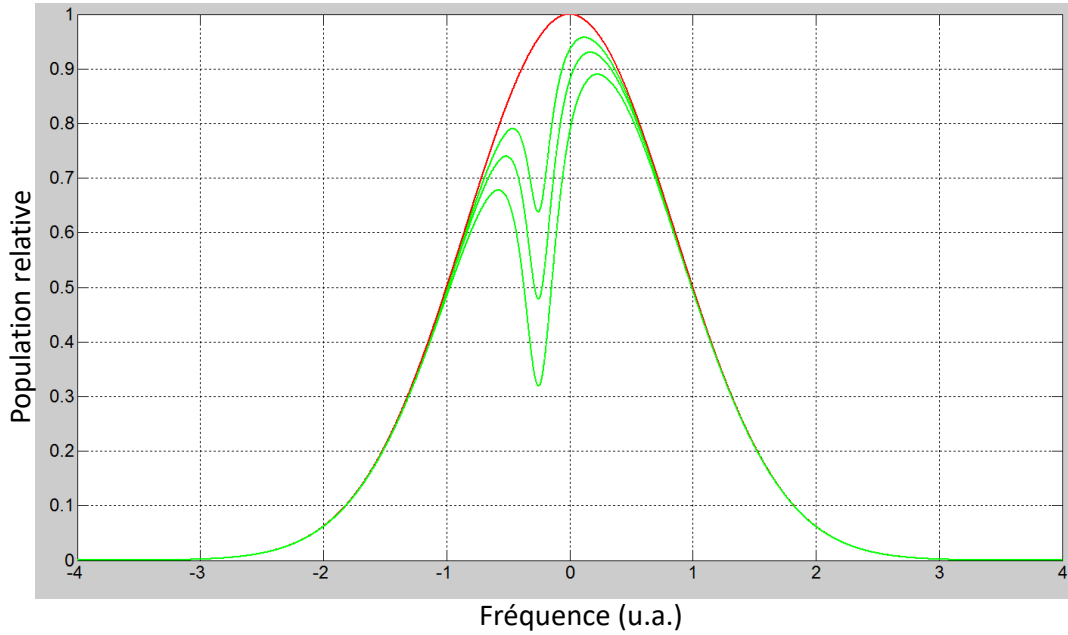


Fig. 5 Calcul à partir de l'éq. 10 de l'évolution de la population excitée pour une distribution gaussienne de demi-largeur unité saturée par un rayonnement monochromatique de fréquence  $\nu = -0.25$  en fonction de  $\nu'$ . En rouge : population non-saturée; en vert : population saturée par un rayonnement monochromatique pour  $\chi = 1/2, 1$  et  $2$ . La section efficace d'émission d'une classe d'atomes est Lorentzienne de demi-largeur égale à  $\Delta\nu_{\text{hom}}=0.1$ . On voit qu'un trou se creuse dans la population au voisinage de la fréquence du rayonnement saturant et ce, d'autant plus que la valeur du paramètre  $\chi$  est élevée.

On peut alors modifier l'équation (5b) pour obtenir une expression pour le coefficient d'amplification saturé à une fréquence quelconque  $\nu''$  :

$$-\alpha(\nu'') = N_{20} \int \frac{P(\nu')}{1 + \frac{\chi}{1 + (\nu - \nu' / \Delta\nu_{\text{hom}})^2}} \sigma_e(\nu'' - \nu') d\nu', \tag{11}$$

Intéressons-nous maintenant au gain à la fréquence du rayonnement incident,  $\nu$ . En remplaçant l'expression (6) de  $\sigma_e$ , dans (11) et en évaluant à  $\nu'' = \nu$ , on obtient:

$$-\alpha(v) = \frac{N_{20}\sigma_0}{(1+\chi)} \int \frac{P(v')}{1 + \left( (v-v') / (\sqrt{1+\chi}\Delta v_{\text{hom}}) \right)^2} dv' \quad (12)$$

Dans le cas particulier fréquemment rencontré où la largeur de la fonction de distribution  $P$  est très supérieure à celle du terme Lorentzien, on peut alors sortir  $P$  de l'intégrale et l'évaluer à  $v'=v$ . Les équations (5b) et (12) deviennent respectivement:

$$-\alpha_0(v) \approx N_{20}P(v) \int \sigma_e(v-v') dv' \quad (5c)$$

et

$$-\alpha(v) = \frac{N_{20}P(v)}{(1+\chi)} \int \frac{\sigma_0}{1 + \left( (v-v') / (\sqrt{1+\chi}\Delta v) \right)^2} dv'. \quad (13)$$

Après un changement de variables, puis en comparant (5c) avec (13), on obtient facilement :

$$-\alpha(v) = \frac{-\alpha_0(v)}{\sqrt{1+\chi}} \quad (14)$$

Le gain à la fréquence du rayonnement saturant baisse donc d'un facteur  $\frac{1}{\sqrt{1+\chi}} = \frac{1}{\sqrt{1+I_s/I_{sat\min}}}$ , ce qui

est plus faible que pour un milieu homogène où le gain sature selon la loi :  $\frac{1}{1+I_s/I_{sat}}$ . Dans le cas général

où les largeurs homogène et inhomogène sont quelconques, la saturation progresse avec  $I$  à un taux intermédiaire entre ces deux valeurs et l'éq. 12 doit être calculée numériquement.

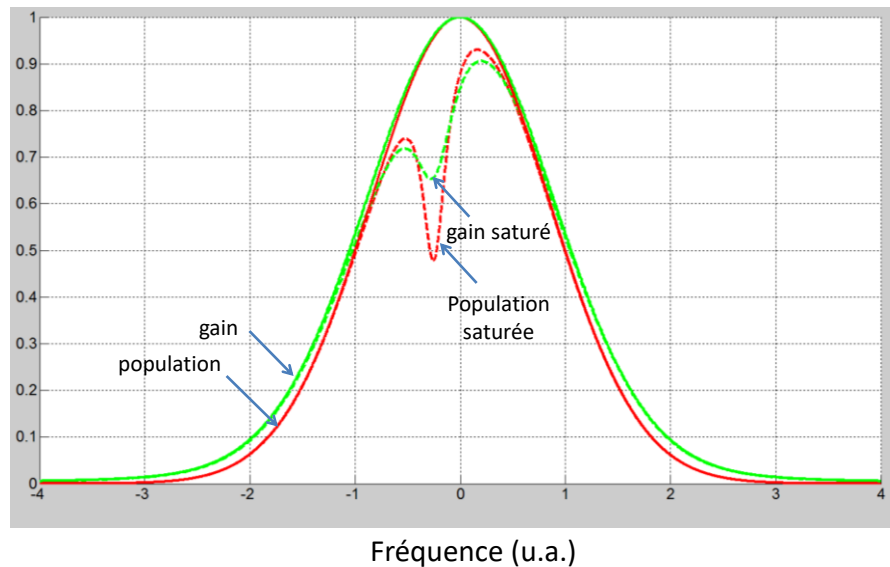


Fig. 6 Comparaison de la distribution de la population excitée (en vert) et de la courbe de gain,  $-\alpha$ , (en rouge) pour  $\chi=0$  (trait plein) et  $\chi=1$  (en tiretés) calculée avec l'éq. (9). Les paramètres de la simulation sont les mêmes que ceux utilisés à la Fig. 5.

#### 11.4 Émission multimode dans un laser à élargissement inhomogène

Comme le montre la Fig. 6, la saturation de la courbe de gain causée par un rayonnement à une fréquence donnée produit une saturation locale de la courbe de gain. Ceci implique que le gain peut encore dépasser les pertes pour des modes situées à d'autres fréquences de résonance du résonateur : si c'est le cas, l'oscillation laser se produira aussi pour celles-ci et l'émission simultanée dans plusieurs modes, appelée émission multimode, se produira. Ce phénomène est illustré à la Fig. 7. La ligne horizontale à  $\text{gain} = 1/c\tau_c$  correspond au seuil d'oscillation.

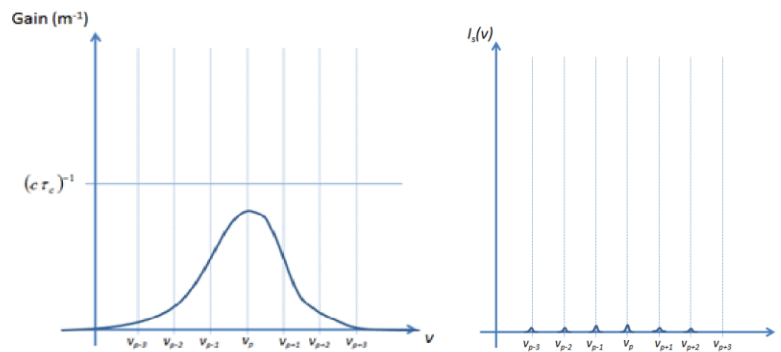


Fig. 7a. Illustration d'une courbe de gain (à gauche) et d'un spectre d'émission (à droite) pour un milieu amplificateur avec un pompage inférieur au seuil. L'oscillation laser n'a pas lieu et l'intensité émise dans l'axe du résonateur est souvent très faible par rapport au bruit du détecteur et est répartie sur plusieurs modes.

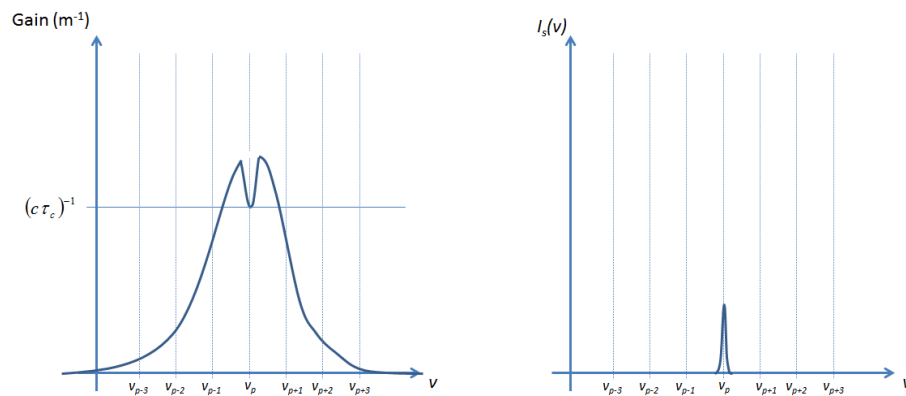


Fig. 7b. Illustration d'une courbe de gain (à gauche) et d'un spectre d'émission (à droite) pour un milieu amplificateur inhomogène avec un pompage d'environ  $r=1.25$ . L'oscillation laser dans le mode de fréquence  $\nu_p$  fait en sorte que presque tous les photons émis appartiennent à ce mode.



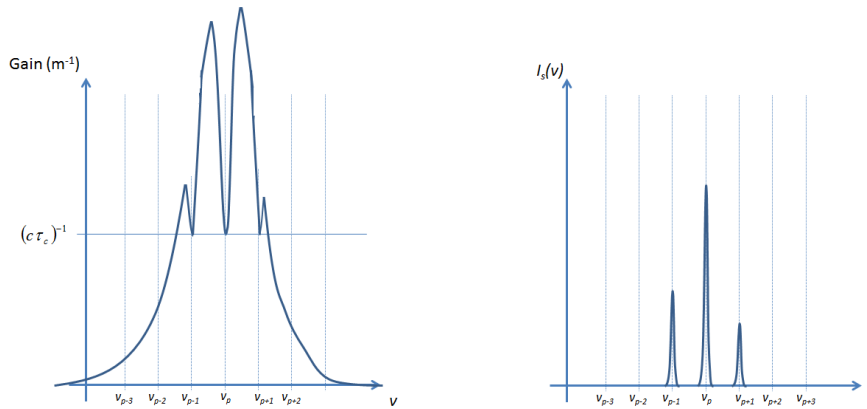


Fig. 7c. Illustration d'une courbe de gain (à gauche) et d'un spectre d'émission (à droite) pour un milieu amplificateur hétérogène avec un taux de pompage de plus du double qu'au seuil. Dans cet exemple, l'oscillation laser a lieu sur les trois modes près du centre de la courbe de gain, les autres modes sur les flancs ayant un gain trop faible pour osciller.

11.5 Retour sur les milieux à élargissement homogène : creusement spatial dans un résonateur à onde stationnaire.

Nous avons vu que la courbe de gain d'un milieu homogène saturait globalement d'un seul bloc, et nous en avons déduit que l'émission d'un laser avec un milieu à élargissement homogène est monomode. Cependant, les expériences montrent que, dans un résonateur à onde stationnaire, l'oscillation devient rapidement multimode à mesure qu'on augmente le taux de pompage, et ce, même pour un milieu à élargissement homogène. En fait, un taux de pompage à peine supérieur au seuil suffit habituellement pour faire apparaître un second mode longitudinal. La Fig. 8 montre un spectre d'émission d'un laser  $\text{Yb}^{+3}:\text{YAG}$  pour différentes valeurs de la puissance du faisceau de pompe. On voit que le nombre de modes d'émission augmente à mesure que la puissance du faisceau pompe augmente, malgré la nature homogène du milieu amplificateur.

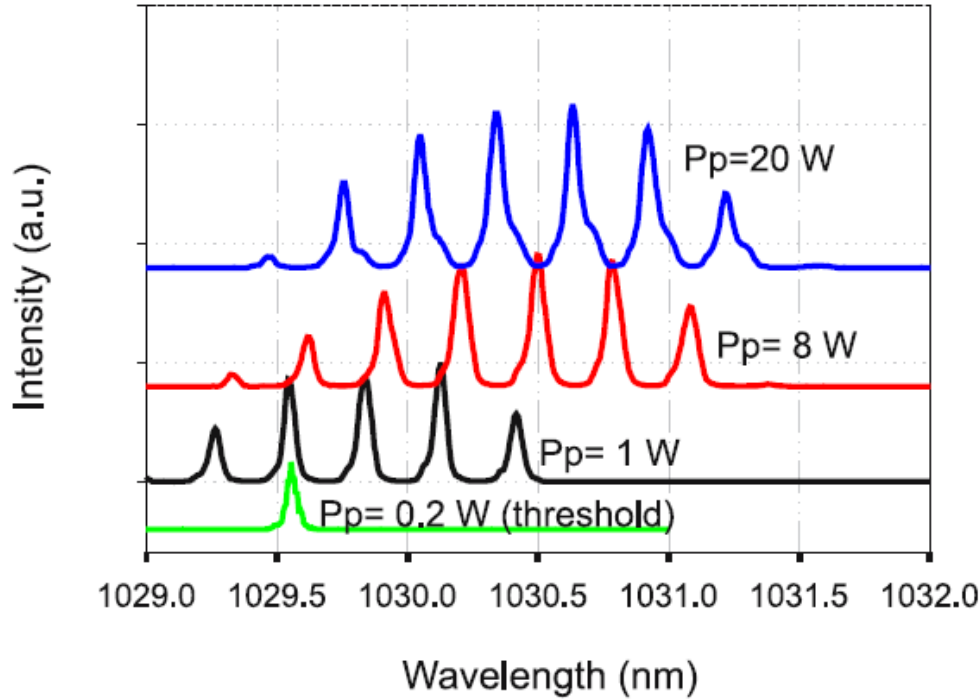


FIGURE 8 Emission spectrum of the microchip at various absorbed pump powers (0.2, 1, 8 and 20 W). The spectra are vertically shifted for clarity

Fig. 8. Spectre d'émission d'un laser microchip  $\text{Yb}^{3+} : \text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$  d'un millimètre d'épaisseur au voisinage et au-dessus du seuil [9].

La raison de l'apparition de plusieurs modes longitudinaux tient à l'utilisation d'un résonateur à onde stationnaire, dans lequel des nœuds et des ventres de champ électrique apparaissent (Cf. Fig. 9). Considérons un milieu amplificateur d'indice  $n=1$ , pompé de manière uniforme et oscillant dans un seul mode de fréquence  $\nu_p$ . L'intensité de l'onde de signal appartenant à ce mode aura la forme:

$$I_s(z) = 4I_0 \sin^2(k_p z), \quad (15)$$

où  $I_0$  est l'intensité de chacune des deux ondes progressives qui se propagent en sens inverses et

$k_p = \frac{2\pi\nu_p}{c}$  est le nombre d'onde. L'intensité moyenne est de  $2I_0$  comme on peut s'y attendre. Or, la

population de l'état excité d'un système à quatre niveaux idéal est donnée par:

$$N_2 = \frac{R_p \tau_{rad}}{1 + \frac{I_s}{I_{sat}}}, \quad (10.11)$$

En remplaçant (15) dans (10.11), on trouve :

$$N_2(z) = \frac{R_p \tau_{rad}}{1 + \frac{4I_0 \sin^2(k_p z)}{I_{sat}}}. \quad (16)$$

On voit donc apparaître une modulation périodique de population de l'état excité dans le milieu amplificateur, Cf. Fig. 9 au centre. Aux noeuds de champ électrique, la population de l'état excité n'est pas saturée et est donnée par :  $N_2|_{noeuds} = R_p \tau_{rad}$ , alors qu'aux ventres de champ électrique, la population de

l'état excité y est moindre:  $N_2|_{ventres} = \frac{R_p \tau_{rad}}{1 + \frac{4I_0}{I_{sat}}}$ .

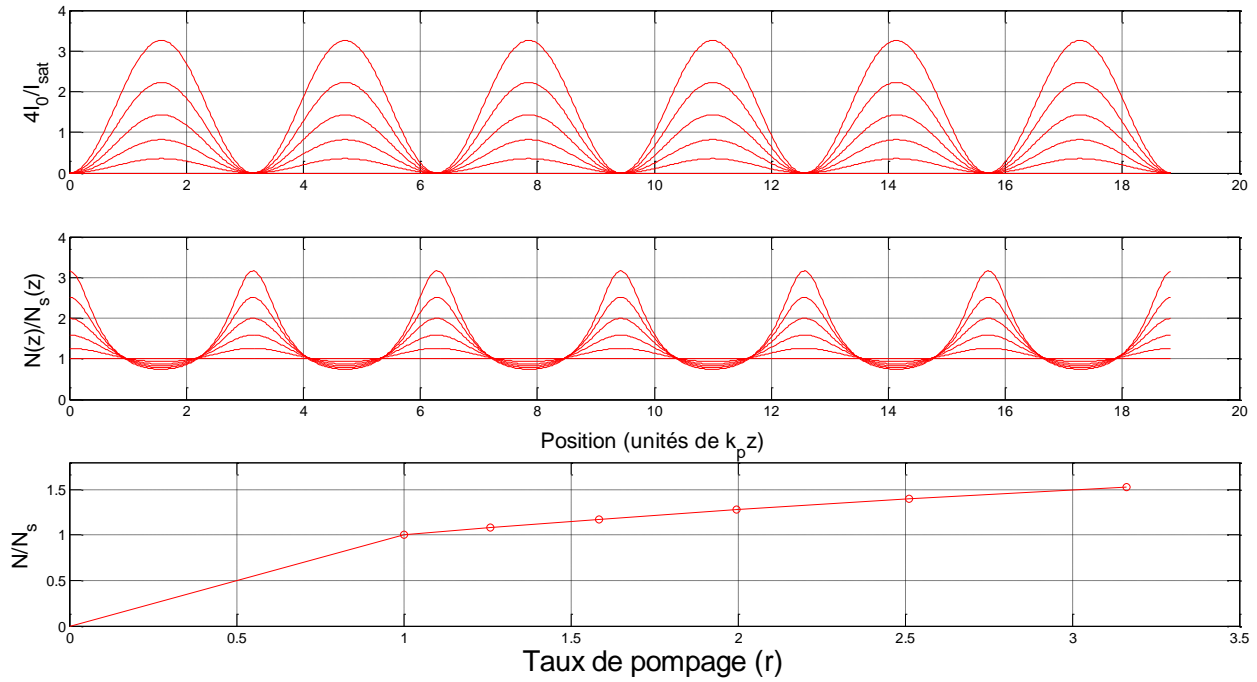


Fig. 9 En haut : distribution d'intensité à l'intérieur d'un réseau à onde stationnaire suivant l'expression  $I_s(z) = 4I_0 \sin^2(k_p z)$  pour des taux de pompages de  $\log_{10} r = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ , où  $r \equiv \frac{N_{20}}{N_s}$ . Au centre :

distributions d'inversion de population normalisée par la valeur au seuil,  $N_s$ , pour les mêmes valeurs de taux de pompage :  $N_2(z) = \frac{N_{20}}{1 + \frac{I_s(z)}{I_{sat}}}$ . La valeur de  $N_0$  est déterminée de sorte que le gain moyen pondéré par la probabilité

de trouver un photon à une position  $z$  compense les pertes dans le résonateur. Note: le taux de pompage  $r$  et  $I_0$  sont reliés par la relation:  $r^{-1} = 2 \frac{\sqrt{a+1}-1}{a\sqrt{a+1}}$ , où  $a \equiv \frac{4I_0}{I_{sat}}$  (Cf. question 12). En bas : inversion de population moyenne,

normalisée par la valeur au seuil en fonction du taux de pompage normalisé,  $r$ . Au-dessous du seuil, on a  $\bar{N}_2 = N_2 = rN_s$ , et  $\bar{N}_2 = \frac{2N_s r}{-1 + \sqrt{1+8r}}$  au-dessus (Cf. question 13).

Or, le taux d'émission stimulée dans le résonateur est donné localement par:

$$W_{2,1,stim}(z) = N_2(z) \frac{I_s(z)}{h\nu} \sigma_e \quad [\text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}]. \tag{6.2b}$$

On peut alors calculer le taux d'émission stimulée total en intégrant sur le volume du mode  $V=SL$  dans le résonateur:

$$\Gamma_{st} = \frac{\sigma_e S}{h\nu} \int_{z=0}^L N_2(z) I_s(z) dz \quad [s^{-1}], \quad (17)$$

où l'on a supposé une distribution d'intensité transversale uniforme sur toute la section  $S$  du mode. Le volume du mode est donné par  $V=SL$ . Le taux de pertes de photons dans le résonateur est donné par:

$$\Gamma_c = \frac{2I_0 V}{h\nu c \tau_c} \quad [s^{-1}]. \quad (18a)$$

Au seuil (et au-delà), nous avons :

$$\Gamma_{st} = \Gamma_c. \quad (19)$$

Or, il existe une corrélation inverse entre les distributions spatiales  $N(z)$  et  $I_s(z)$  (Cf. Fig. 10) puisque  $N$  est grand là où  $I_s$  est petit, et vice versa. De cette corrélation inverse, on peut donc conclure que le taux d'émission stimulée est plus faible que si l'inversion de population et l'intensité étaient réparties uniformément dans le résonateur :

$$\Gamma_{st} = \frac{\sigma_e S}{h\nu} \int_{z=0}^L N_2(z) I_s(z) dz < \frac{\sigma_e V}{h\nu} \overline{N_2 I_s} \quad (20)$$

où  $\overline{N_2} \equiv \frac{1}{L} \int_{z=0}^L N_2(z) dz$  et  $\overline{I_s} \equiv \frac{1}{L} \int_{z=0}^L I_s(z) dz = 2I_0$ . Ceci va contribuer à réduire l'efficacité de conversion

optique comparativement à une cavité en anneau, où le gain et l'intensité de l'onde électromagnétique peuvent y être uniformes (Cf. chapitre 12). Or, nous avons vu au chapitre 10 que l'inversion de population plafonnait et devenait constante lorsque le taux de pompage dépassait le seuil d'oscillation. Cette théorie ignorait la présence de nœuds et de ventres de champ électrique dans un résonateur à onde stationnaire. En

réalité, l'inversion de population moyenne dans un résonateur à onde stationnaire continue à augmenter à mesure que le taux de pompage augmente, même au-dessus du seuil, à cause de la présence des nœuds de champ électrique (Cf. Fig. 9 en bas). À ces positions, la saturation de l'état excité est inexistante et la population de l'état excité continue à augmenter avec le taux de pompage même au-dessus du seuil car l'émission stimulée y est nulle.

La situation est différente pour le mode voisin de fréquence  $\nu_{p+1}$ , où il n'y a pas de corrélation entre l'inversion de population causée par le mode principal et l'intensité de l'onde du mode  $p+1$ , Cf. Fig. 11. À partir de l'équation (17), le taux de création de photons de fréquences  $\nu_{p+1}$  par émission stimulée est donné par :

$$\Gamma_{st} = \frac{\sigma_e S}{h\nu} \int_{z=0}^L N_2(z) I_s(z, \nu_{p+1}) dz = \frac{\sigma_e(\nu_{p+1}) S}{h\nu_{p+1}} 2I_0(\nu_{p+1}) \int_{z=0}^L N_2(z) dz, \quad (21)$$

car il n'y a pas de corrélation entre l'intensité  $I(\nu_{p+1})$  et la distribution périodique d'inversion. Le taux de perte de photons qui quittent le résonateur est quant à lui toujours donné par l'équation (18a) :

$$\Gamma_c = \frac{2I_0(\nu_{p+1})V}{h\nu_{p+1}c\tau_c}. \quad (18b)$$

La condition de seuil pour le mode  $\nu_{p+1}$  s'écrit par l'égalité de (21) et (18b), qui se simplifie et devient

$$\frac{\sigma_e(\nu_{p+1})N_t}{V} = \frac{1}{c\tau_c}, \quad (22)$$

où  $N_t = S \int_{z=0}^L N_2(z) dz$  est le nombre total d'atomes dans l'état excité (Cf. chapitre 10). Même si la section efficace du mode  $p+1$  est plus petite que celle du mode principal,  $\sigma_e(\nu_{p+1}) < \sigma_e(\nu_p)$ , ce mode profite mieux de l'inversion de population et, à mesure que le taux de pompage augmente,  $N_t$  augmente et la condition

(22) est éventuellement atteinte (voir question 10). Quand cela survient, le mode  $p+1$  se met à osciller, en plus du mode  $p$ , et l'émission n'est plus monomode.

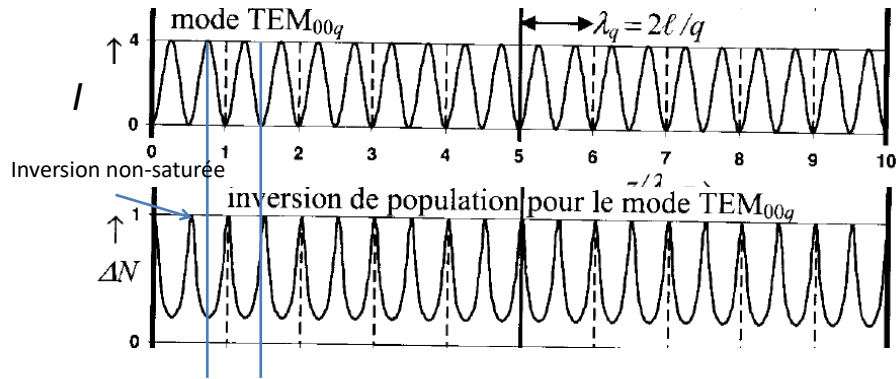


Fig. 10 Existence d'une corrélation négative entre la distribution de l'intensité de l'onde stationnaire (probabilité de présence de photon) et l'inversion de population [10] pour le mode principal qui oscille le premier.

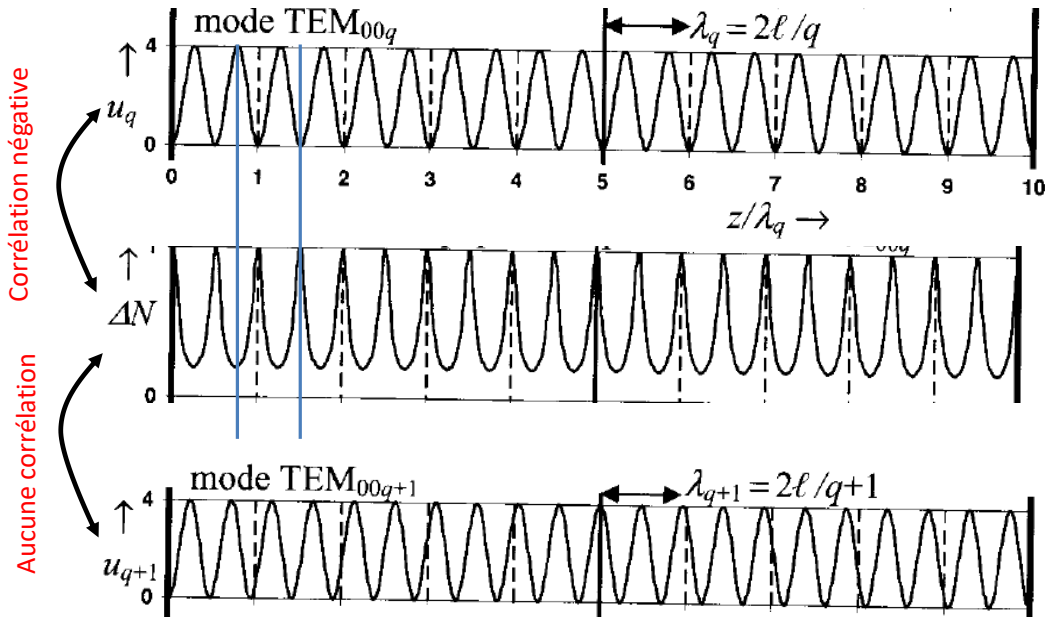


Fig. 11 Pour le mode voisin du mode qui oscille, il y a absence de corrélation entre la distribution d'intensité du champ saturant et l'inversion de population [10].

### 11.6 Méthodes pour l'obtention d'une émission monomode.

Toutes ces considérations indiquent que l'obtention d'un laser monomode requiert en fait beaucoup d'efforts et de soin de la part de ses concepteurs. Il existe plusieurs méthodes permettant d'obtenir une émission monomode longitudinale:

- 1) Méthodes basées sur l'élimination des noeuds de champ électrique dans un résonateur.
  - a. Élimination de l'onde stationnaire en utilisant un résonateur en anneau unidirectionnel; c'est la méthode la plus simple conceptuellement puisqu'on élimine à la source la possibilité d'interférences entre les ondes progressives.
  - b. Mise en place d'un mécanisme pour faire en sorte que les deux ondes se propageant en sens opposés soient polarisées orthogonalement. On a alors une distribution d'intensité indépendante de la position, mais avec une polarisation changeante. Il faut alors s'assurer que le milieu actif a une réponse spectrale isotrope [11]. Nous avons montré théoriquement [12] et expérimentalement [13] que l'utilisation de miroirs anisotropes produisant un déphasage proche de  $180^\circ$  à la réflexion pouvait justement créer cette onde stationnaire sans nœud car ils permettent l'obtention d'états de polarisation presque orthogonaux entre les ondes se propageant dans des directions opposées.
- 2) L'utilisation d'un milieu où les pertes varient de façon non linéaire avec la puissance incidente, tel qu'un absorbant saturable (AS), peut être bénéfique puisque le second mode, moins intense que le mode dominant, peut plus difficilement saturer les pertes de l'AS.
- 3) La combinaison d'un oscillateur et un amplificateur (ou *MOPA* pour *Master Oscillator Power Amplifier*) : on utilise un oscillateur qui fonctionne au voisinage du seuil de telle sorte qu'un seul mode oscille. On peut rendre l'oscillation multimode moins favorable en utilisant un résonateur court, de manière à augmenter l'intervalle spectral libre et espacer les modes davantage, et un milieu amplificateur dont la raie de transition est mince de sorte que la section efficace des modes voisins soit beaucoup plus petite que celle du mode dominant. Le faisceau de faible puissance émis par



l'oscillateur peut ensuite être amplifié par un amplificateur qui préserve les propriétés spatio-temporelles du faisceau.

- 4) L'insertion de filtres dans le résonateur. La Fig. 12 montre un laser à colorant utilisé dans une configuration en anneau. Cette dernière peut en principe forcer l'émission dans un seul mode longitudinal pour un milieu à élargissement homogène comme le colorant, mais la proximité des modes causée par la longueur importante du résonateur provoque des sauts de mode rapides dus à des fluctuations mécaniques telles que la longueur du résonateur ou des fluctuations d'indices d'origine thermique. Pour éviter cela, on place dans le résonateur plusieurs filtres en série ayant des réponses en fréquences différentes, c'est-à-dire un filtre de Lyot, puis deux étalons Fabry-Perot, respectivement mince et épais pour qu'un seul mode puisse osciller. Le résultat est schématisé à la Fig. 13. Pour éviter le saut de mode, il faudra peut-être aussi asservir la longueur du résonateur.

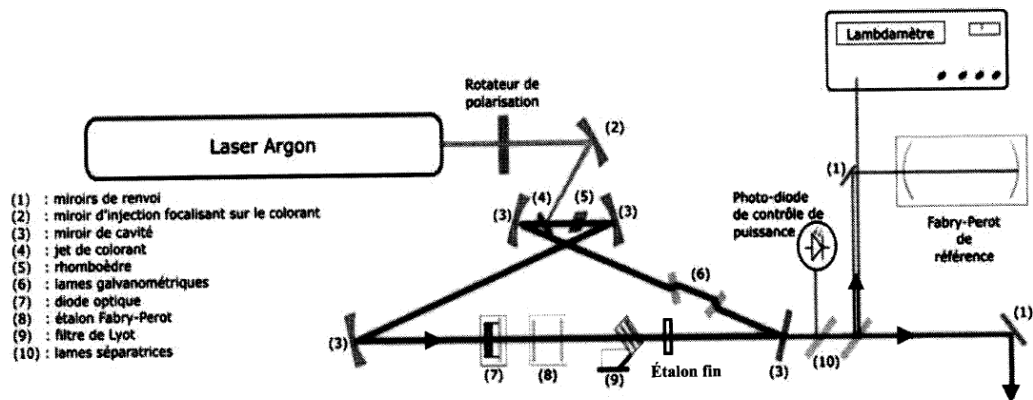


Fig. 12. Schéma d'un laser à colorant en anneau conçu pour émettre l'oscillation dans un seul mode longitudinal [14].

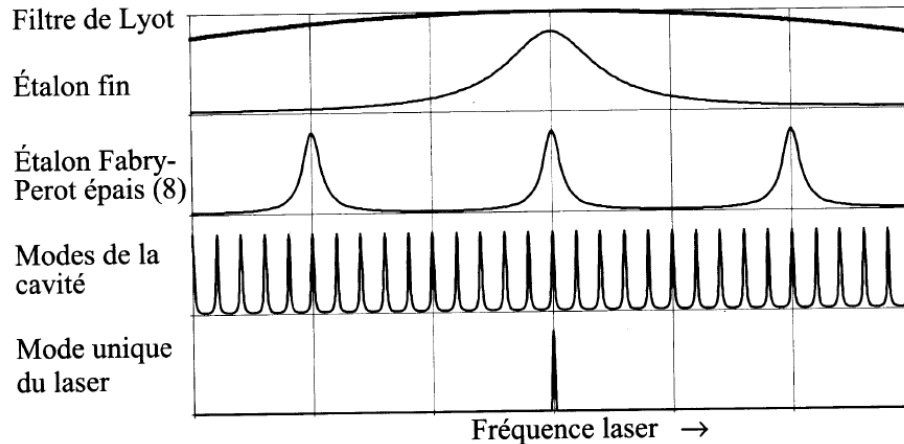


Fig. 13 L'émission dans un seul mode s'obtient en combinant plusieurs plusieurs filtres ayant des réponses spectrales plus ou moins fines, tels que le filtre de Lyot, l'étalon fin puis l'étalon Fabry-Perot épais. La transmission globale des trois composants en série donne une réponse spectrale très fine [14].

### 11.7 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons d'abord établi une classification des milieux actifs en deux catégories : les milieux à élargissement homogène et ceux à élargissement inhomogène. Pour les premiers, tous les atomes ont les mêmes spectres d'absorption et d'émission et la saturation de la courbe de gain se fait d'un seul bloc. Pour un milieu homogène, l'émission laser est a priori monomode. Pour les seconds, il y a une distribution des spectres d'émission au sein de la population des centre luminescents composant le matériau et la saturation se manifeste localement par des trous dans la courbe de gain : on parle de creusement spectral de trous. Pour les milieux inhomogènes, l'émission laser est a priori multimode.

Toutefois, dans le cas d'un résonateur à onde stationnaire, la distribution périodique de l'intensité de l'onde électromagnétique dans le résonateur fait apparaître des nœuds d'intensité dans le résonateur où la saturation ne peut pas se produire et où l'inversion de population peut prendre des valeurs importantes. Ceci donne lieu à une distribution spatiale du gain et on parle de *creusement spatial* dans celle-ci. Ces régions, non saturées car  $I_s=0$ , peuvent ensuite être exploitées par d'autres modes qui n'ont pas leurs nœuds

aux mêmes endroits et qui peuvent donc ainsi osciller simultanément. Ce phénomène donne lieu à une émission multimode, même pour un milieu homogène.

Différentes méthodes existent pour s'affranchir de ce problème; elles mettent en œuvre les résonateurs en anneau, des polarisations orthogonales pour des ondes se propageant en sens opposés dans le résonateur, etc.

**Questions et exercices:**

1. Montrer que les pertes moyennes d'un résonateur par unité de longueur sont données par  $\frac{1}{c \tau_c}$ .
2. Montrer que la population d'ions dans l'état excité au seuil d'oscillation,  $N_s$ , est donnée par :
 
$$N_s = \frac{1}{\sigma_e c \tau_c} .$$
3. Démontrer l'équation (4) et donner l'expression de la constante de normalisation  $C''$ .
4. Quel est l'élargissement Doppler associé à l'atome de néon à  $T=400$  K. Donner la réponse en Hz et en nm pour  $\lambda = 632.8$  nm.
5. Établir une relation entre le taux de collision et la largeur homogène d'une transition.
6. À la figure de gauche montrée à la Fig. 3, on montre que le coefficient d'absorption d'abord augmente avec la pression pour ensuite tendre vers une valeur constante. La comparaison avec la figure de droite montre que la transition se produit lors du passage d'un élargissement à prépondérance inhomogène à un élargissement à prépondérance homogène. En vous aidant d'un modèle physique basé sur des équations vues dans ce chapitre, fournir une explication convaincante de ce phénomène.
7. À la Fig. 6, pourquoi la courbe en vert est-elle légèrement plus large que la courbe en rouge?
8. Quelle est la longueur du résonateur utilisée pour obtenir le spectre montré à la Fig. 8?
9. Démontrer l'équation (12).
10. Comment se fait-il que la saturation du gain pour un milieu inhomogène évolue en  $\frac{1}{\sqrt{1+\chi}}$ , alors que, d'après l'équation (10), la population de l'état excité sature localement en  $\frac{1}{1+\chi}$ ? Ce phénomène est illustré à la Fig. 6. On cherche une explication qualitative.

11. Montrer que, dans un résonateur à onde stationnaire, l'inversion de population moyenne au-delà du seuil n'est pas constante mais est donnée par :  $\bar{N}_2 = \frac{N_{20}}{\sqrt{1 + \frac{4I_0}{I_{sat}}}}$ , où  $N_{20}$  est la population non saturée. Indice :

l'intégrale définie  $\int_0^\pi \frac{1}{1 + a \sin \theta} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{a+1}}$  sera utile.

12. Montrer que, dans un résonateur à onde stationnaire, l'intensité  $I_0$  et le taux de pompage normalisé,

$r \equiv \frac{N_0}{N_s}$ , sont reliés par la relation :  $r^{-1} = 2 \frac{\sqrt{a+1}-1}{a\sqrt{a+1}}$ , où  $a \equiv \frac{4I_0}{I_{sat}}$ . Indice : l'intégrale définie

$\int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{1 + a \sin \theta} d\theta = \frac{\pi(\sqrt{a+1}-1)}{a\sqrt{a+1}}$  sera utile.

13. Montrer que l'inversion de population moyenne dans le résonateur à onde stationnaire est donnée par :

$\bar{N}_2 = N_2 = N_s r$  pour  $r \leq 1$  et  $\bar{N}_2 = \frac{2N_s r}{-1 + \sqrt{1+8r}}$ , pour  $r > 1$ . Cette fonction est tracée en bas de la Fig.

7.

14. Considérons un laser monomode transverse. Si le mode longitudinal voisin du mode dominant a une section efficace effective d'émission égale à 90% de celle pour le mode dominant, pour quelle valeur de  $r$  le laser émettra-t-il dans le second mode (et deviendra ainsi multimode)?

13. Considérer un résonateur à onde stationnaire. Si on l'allonge, est-il plus, ou moins, susceptible d'osciller dans plusieurs modes à cause du creusement spatial? Justifier votre réponse.

14. Est-ce que le creusement spatial existe dans un laser hélium-néon commercial? Appuyer votre réponse par les quantités physiques appropriées et une estimation de leur ordre de grandeur.

15. On fait passer un faisceau provenant d'un laser à gaz d'intensité  $I_0$  passant à travers une autre cellule contenant le même milieu, de longueur  $l$ . Ce milieu est soumis à une décharge qui produit un coefficient

d'amplification non saturée  $g_0$  [ $\text{m}^{-1}$ ]. On néglige toutes les pertes dans le milieu (par réflexion ou diffusion). On suppose que le milieu actif est idéal à quatre niveaux et à élargissement homogène. On mesure l'intensité à la sortie,  $I_{\text{sortie}}$ .

- Établir une relation entre  $\eta = \frac{I_{\text{sortie}}}{I_0}$ ,  $g_0$ ,  $l$  et  $I_{\text{sat}}$ . La relation proposée doit prendre en compte la saturation du milieu amplificateur par le faisceau incident. Indice : vous aurez peut-être besoin de résoudre une intégrale.
- Suggérer une méthode pour mesurer  $I_{\text{sat}}$  avec le montage ci-dessous.

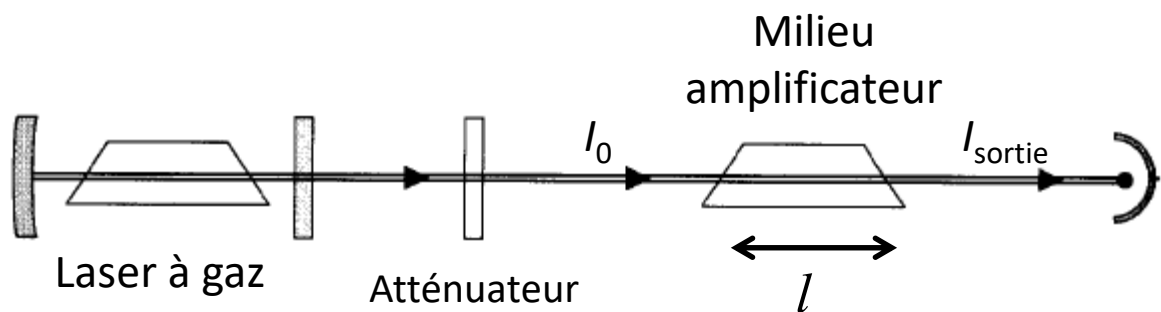


Fig. 14. Schéma du montage pour la question 15.

16. Donner des exemples d'applications où l'émission monomode longitudinal apporte un bénéfice clair par rapport à un laser émettant un spectre multimode longitudinal.

### Références et commentaires :

<sup>1</sup> Référence principale : C. Delsart, *Lasers et optique non linéaire*, Chap. 5, sections 5.1.1, 5.1.3, 5.1.4, 5.3.1, 5.3.2.

<sup>2</sup> Le système peut néanmoins osciller dans deux polarisations orthogonales.

<sup>3</sup> Voir S. Houard, *Optique : une approche expérimentale et pratique*, De Boeck éditeur, 2011, chapitre 11, section 11.4.7, pour une description sommaire de l'effet Doppler et de son application en vélocimétrie Doppler.

<sup>4</sup> Cette formule est valide seulement pour des vitesses non-relativistes.

<sup>5</sup> Figure tirée de A. E. Siegman, *Lasers*, p. 131.

<sup>6</sup> Figure tirée de A. E. Siegman, *Lasers*, p. 168.

<sup>7</sup> Figure tirée de A. E. Siegman, *Lasers*, p. 128.

<sup>8</sup> Voir C. Delsart, *Lasers et optique non linéaire*, partie 3, section 3.4.3.

<sup>9</sup> Figure tirée de J.-F. Bisson et al., *Appl. Phys. B*, 519-524, (2006).

<sup>10</sup> C. Delsart, *Lasers et optique non linéaire*, partie 3, section 3.4.3, p. 145.

---

<sup>11</sup> Voir V. Evtuhov, A.E. Siegman, *Twisted-mode technique for obtaining axially uniform energy density in laser cavity*, Appl. Opt. 4(1), 142-143, 1965. Pour une référence plus récente, voir: P. Polynkin, A. Polynkin, M. Mansuripur, J. Moloney, N. Peyghambarian, *Single-frequency laser oscillator with watts-level output power at 1.5  $\mu\text{m}$  by use of a twisted-mode technique*, Opt. Lett. 30(20), 2745-2747, 2005.

<sup>12</sup> J.-F. Bisson et K. N. Amouzou, *Controlling spatial hole burning in lasers using anisotropic laser mirrors*, J. Opt. Soc. Amer. B, 36(12), 3322-3332, 2019.

<sup>13</sup> J.-F. Bisson et K. N. Amouzou, *Elimination of spatial hole burning in solid-state lasers using nanostructured thin films*, Appl. Opt., 59(5), 2020.

<sup>14</sup> C. Delsart, *Lasers et optique non linéaire*, partie 3, section 3.4.3, p. 156.