

Chapitre 1

La propagation des faisceaux de lumière cohérente dans l'approximation de l'optique paraxiale

Objectifs spécifiques du chapitre 1:

- 1) *Comprendre la signification d'un champ électrique complexe;*
- 2) *Énumérer et expliquer les hypothèses qui permettent d'établir l'équation de Helmholtz à partir des équations de Maxwell;*
- 3) *Expliquer ce qu'on entend par milieu 'homogène', 'linéaire', ou 'isotrope';*
- 4) *Décrire et expliquer les hypothèses permettant de passer de l'équation de Helmholtz à l'équation d'onde paraxiale;*
- 5) *Expliquer le principe du spectre d'ondes planes pour décrire la propagation d'un faisceau;*
- 6) *Savoir résoudre l'équation de Huygens-Fresnel numériquement (à faire dans le devoir 1);*
- 7) *Décrire les hypothèses et les calculs qui permettent d'établir l'équation de Huygens-Fresnel à partir de l'intégrale de Rayleigh-Somerfeld;*
- 8) *Comprendre ce qu'est le nombre de Fresnel et expliquer son utilité pour la description d'une expérience de diffraction;*
- 9) *Expliquer les conditions expérimentales et mathématiques qui permettent de passer de la formule de Huygens-Fresnel à la formule de diffraction de Fraunhofer.*

1.1 Introduction

Une des caractéristiques les plus remarquables de la lumière provenant d'un laser est sa cohérence élevée. Brièvement, la cohérence d'une source lumineuse est liée à sa capacité d'interférer avec elle-même [1]. On distingue généralement deux types de cohérence: la cohérence temporelle [2] et la cohérence spatiale [3]. La cohérence temporelle est liée au degré de corrélation des champs électriques en deux points le long de l'axe de propagation d'un faisceau laser en fonction de l'espacement de ces deux points. La corrélation signifie qu'il existe un déphasage stationnaire entre les champs aux deux points en question. La cohérence temporelle s'observe facilement avec un interféromètre de Michelson par des modulations périodiques d'intensité, correspondant à des interférences constructives ou destructives, en fonction de la différence de marche appliquée entre les deux bras de l'interféromètre. Plus étroite sera la largeur spectrale d'une source, plus grande sera la différence de marche maximale pour laquelle on peut observer des modulations d'intensité. La cohérence spatiale est reliée à la corrélation des champs électriques en deux points perpendiculairement à la direction de propagation du faisceau; une cohérence spatiale élevée signifie que le front d'onde d'une source est régulier et implique la capacité de produire, au moyen de lentilles, une tache focale très fine, parfois de l'ordre de la longueur d'onde, ou encore un faisceau à la fois très peu divergent et de faible largeur (ex. pointeur laser). Donc, la lumière laser peut posséder à la fois une largeur spectrale très fine et un front d'onde bien régulier, ce qui ouvre la voie à un grand nombre d'applications scientifiques ou technologiques.

Pour exprimer la cohérence temporelle très élevée d'un laser, nous allons décrire le faisceau par une onde monochromatique idéale de fréquence angulaire ω . Maintenant, pour ce qui est de la cohérence spatiale, on serait tenté de décrire un faisceau bien collimaté par une onde plane décrite par un seul vecteur d'onde \vec{k} , qui décrit à la fois la direction de propagation du faisceau [4] et la longueur d'onde d'émission via l'expression $k=2\pi/\lambda$. Ainsi, si l'émission est polarisée linéairement, i.e., avec un vecteur champ électrique

\vec{u} constant, qui est perpendiculaire à \vec{k} , alors on peut décrire le champ électrique d'une émission laser par l'expression suivante:

$$\vec{E}_0 = \Re \left\{ \vec{E} \exp(-i\omega t) \right\} \equiv \Re \left\{ \vec{u} \exp i(kz - \omega t) \right\}, \quad (1)$$

où $\vec{E} \equiv \vec{u} \exp(ikz)$ est le champ électrique complexe de l'onde, qui se propage dans le sens positif de l'axe z . $\Re \{ \dots \}$ représente la partie réelle du nombre complexe entre accolades [5]. Bien que seule la partie réelle de \vec{E} représente le champ électrique, dans la suite nous allons manipuler les quantités complexes correspondantes \vec{E} et \vec{u} à cause des simplifications mathématiques que cela permet. L'axe z positif est la direction de propagation de l'onde plane. Nous avons introduit la variable u afin de nous affranchir, dans les calculs à venir, des oscillations rapides du champ électrique; en effet, c'est surtout l'enveloppe spatiale du champ, qui varie lentement à l'échelle de la longueur d'onde pour un faisceau peu divergent, qui va nous intéresser.

Cependant, la formulation donnée à l'équation (1) s'avère insuffisante pour la description des propriétés spatio-temporelles des faisceaux lasers réels. En effet, ceux-ci ont toujours une largeur finie, c'est-à-dire que toute l'énergie d'un faisceau est contenue à l'intérieur d'une zone de surface finie. De plus, quand le faisceau se propage, sa distribution transverse d'intensité change à cause du phénomène de diffraction. Au-delà d'une certaine distance, la largeur du faisceau va en augmentant, et cette augmentation est décrite par un angle de divergence; on peut s'en convaincre facilement en projetant un laser He-Ne ou un pointeur laser sur une distance que quelques mètres : on verra alors que la taille du faisceau grossit à mesure que la distance de propagation augmente. Bien sûr, quand le faisceau s'élargit en se propageant, ceci s'accompagne d'une baisse de l'intensité de l'onde électromagnétique. De toute évidence, la description du faisceau par une onde plane ne permet pas de capturer les effets de diffraction et de décrire avec justesse la distribution transverse d'intensité (ou de champ électrique) d'un faisceau laser en fonction de la distance de propagation qu'il franchit. Dans la suite, nous prenons en compte la taille finie d'un faisceau laser.

1.2 L'équation d'onde et l'équation d'Helmholtz appliquée à un milieu homogène et isotrope.

Pour prendre en compte cet état de fait, on suppose une dépendance spatiale pour l'enveloppe \vec{u} , c'est-à-dire :

$$\vec{E} = \vec{u}(x, y, z) \exp(ikz). \quad (2)$$

Nous allons maintenant déterminer la façon dont le champ \vec{u} se transforme lors de sa propagation dans l'espace. Bien sûr, cette transformation est régie par les équations de Maxwell et l'équation d'onde qui en découle. Nous faisons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- le milieu est homogène, c'est-à-dire l'indice de réfraction, n , est uniforme dans l'espace [6];
- le milieu isotrope, c'est-à-dire l'indice de réfraction, n , est indépendant de l'orientation du vecteur champ électrique;
- le milieu est linéaire, c'est-à-dire il n'y a pas de terme de polarisation non-linéaire avec le champ appliqué [7];
- le milieu est non absorbant à la longueur d'onde considérée, c'est-à-dire l'indice de réfraction, n , est réel;
- on suppose que les densités de charge d'espace ρ et de courant j sont nulles;

Dans ce cas, les équations de Maxwell s'écrivent:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon = 0, \quad (3)$$

où $\varepsilon = \varepsilon_0 K$ et K est la constante diélectrique;

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{j} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (6)$$

En utilisant les équations 5 et 6 et le fait que les opérateurs de dérivées d'espace et de temps commutent, on obtient :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (7)$$

En utilisant l'identité : $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} \equiv \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ et (3), l'équation (7) devient:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (8)$$

L'équation (8) est une équation d'onde [8]. On reconnaît l'équation d'onde électromagnétique et on peut identifier la valeur de la vitesse de la lumière dans le milieu : $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$. Maintenant, comme nous avons supposé une forme harmonique de fréquence angulaire ω pour la dépendance temporelle du champ électrique, l'opérateur dérivée par rapport au temps revient à multiplier par $-i\omega$. Alors, l'équation (8) devient :

$$\nabla^2 \vec{E}(x, y, z) + k^2 \vec{E}(x, y, z) = 0, \quad (9)$$

où $k^2 = \mu\epsilon\omega^2$ est le nombre d'onde au carré. L'équation (9) s'appelle *l'équation de Helmholtz*. Il s'agit d'une équation vectorielle qui renferme en fait trois équations scalaires indépendantes pour chacune des composantes du champ électrique.

Ensuite, si on s'intéresse à une onde qui est polarisée linéairement, se propageant dans un milieu homogène et isotrope, alors on peut s'intéresser à une seule composante du champ électrique. Si on remplace l'équation (2) dans l'équation (9), alors on obtient une équation scalaire pour u :

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2iku_z = 0, \quad (10)$$

où les variables en indices dans l'équation (10) désignent les dérivées partielles par rapport à celles-ci, e.g.,

$u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, etc. Jusqu'ici, aucune approximation n'a été faite, si ce n'est que nous avons considéré une

onde monochromatique se propageant dans un milieu isotrope, linéaire et homogène, ce qui nous permet de considérer séparément chacune des composantes du vecteur champ électrique et donc d'avoir une approche scalaire pour résoudre l'équation d'onde électromagnétique [9].

1.3 L'équation d'onde scalaire dans l'approximation de l'optique paraxiale [10].

Faisons maintenant les hypothèses suivantes :

$$|u_{zz}| \ll 2k|u_z|, \quad (11a)$$

$$|u_{zz}| \ll |u_{yy}|, \quad (11b)$$

$$|u_{zz}| \ll |u_{xx}|. \quad (11c)$$

L'hypothèse (11a) revient à supposer que l'amplitude de $u(x,y,z)$ varie très lentement dans la direction de propagation par rapport à la partie oscillatoire de l'onde, $\exp(ikz)$. Les hypothèses (11b) et (11c) reviennent à supposer que u varie beaucoup plus rapidement dans la direction transverse que dans la direction de propagation. Vous pouvez examiner un pointeur laser ou un laser He-Ne pour vous convaincre de la validité de ces hypothèses; en effet, si le laser He-Ne a un diamètre d'environ 1 mm, l'intensité sur l'axe du faisceau reste à peu près constante sur plusieurs mètres. Les hypothèses (11a, b, et c) permettent de négliger u_{zz} dans l'équation (10), qui devient alors :

$$u_{xx} + u_{yy} + 2iku_z = 0. \quad (12)$$

L'équation (12) s'appelle l'*équation d'onde paraxiale (ÉOP)*. Cette équation est valide dans la mesure où les hypothèses (11) sont valides, ce qui ne sera pas le cas pour un faisceau fortement divergent. Par exemple, si on focalise un laser avec un objectif à forte ouverture numérique, l'approximation paraxiale ne tient plus. L'analogie de cette approximation en optique géométrique correspond à des rayons faiblement inclinés par rapport à l'axe optique et faiblement éloignés de celui-ci. Nous étudierons cette situation en détails au chapitre 3.

Nous allons voir que l'équation (12) conduit à l'équation de Huygens-Fresnel, laquelle permet de calculer simplement la solution du champ $u(x,y,z)$ en un plan quelconque z si on connaît cette distribution en un autre plan, e.g., $z=0$. L'équation (12) possède aussi plusieurs solutions analytiques simples; les faisceaux gaussiens forment probablement la plus célèbre d'entre elles, Cf. chap. 3 [11]. On est donc parfois (mais pas souvent) en mesure d'exprimer de façon analytique, la distribution transverse du champ électrique d'un faisceau partout dans l'espace.

1.4 La solution de l'équation d'onde paraxiale scalaire à l'aide du spectre d'ondes planes.

Considérons un faisceau se propageant dans la direction des z positifs. Supposons que l'on connaisse la distribution de champ $u(x, y, z=0)$ en un plan $z=0$. Nous cherchons à connaître la distribution de champ dans un autre plan z , $u(x, y, z)$. Nous allons voir qu'il est commode de nous intéresser à la transformée de Fourier (TF) du champ u par rapport aux variables spatiales transverses x et y . On définit \tilde{u} comme étant la TF de u et k_x et k_y sont les variables conjuguées de x et y respectivement :

$$\tilde{u}(k_x, k_y, z) \equiv 1/2\pi \iint_{x,y} u(x, y, z) \exp(-ik_x x - ik_y y) dx dy, \quad (13)$$

$$u(x, y, z) \equiv 1/2\pi \iint_{k_x, k_y} \tilde{u}(k_x, k_y, z) \exp(ik_x x + ik_y y) dk_x dk_y. \quad (14)$$

Ici, z est considéré comme un paramètre et non comme une variable. On cherche la distribution $u(x, y, z)$ qui satisfait à l'*ÉOP*: l'équation (14) doit alors satisfaire à l'équation (12). Si on insère (14) dans (12), on trouve :

$$1/2\pi \iint_{k_x, k_y} \left(-(k_x^2 + k_y^2) \tilde{u}(k_x, k_y, z) + 2ik_z \tilde{u}_z(k_x, k_y, z) \right) \exp(ik_x x + ik_y y) dk_x dk_y = 0 \quad (15)$$

Puisque l'éq. (15) est valide quelles que soient les valeurs de x et y , ceci implique que:

$$-(k_x^2 + k_y^2) \tilde{u}(k_x, k_y, z) + 2ik_z \tilde{u}_z(k_x, k_y, z) = 0 \quad (16)$$

L'équation (16) est simplement la transformée de Fourier de l'équation (12) et est une équation différentielle ordinaire du premier ordre pour la variable z . La solution générale s'écrit :

$$\tilde{u}(k_x, k_y, z) = \tilde{u}(k_x, k_y, z=0) \exp\left(-i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} z\right) \quad (17)$$

Maintenant, en insérant (17) dans (14), on trouve :

$$u(x, y, z) = 1/2\pi \iint_{k_x, k_y} \tilde{u}(k_x, k_y, z=0) \exp\left(-i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} z\right) \exp(ik_x x + ik_y y) dk_x dk_y \quad (18)$$

Si l'on considère à nouveau le champ E à l'aide de l'équation (2), et que l'on définit :

$$k_z = k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}, \quad (19)$$

alors on trouve :

$$E = u(x, y, z) \exp(ikz) = 1/2\pi \iint_{k_x, k_y} \tilde{u}(k_x, k_y, z=0) \exp(ik_x x + ik_y y + ik_z z) dk_x dk_y, \quad (20a)$$

ou encore

$$E = u(x, y, z) \exp(ikz) = 1/2\pi \iint_{k_x, k_y} \tilde{u}(k_x, k_y, z=0) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) dk_x dk_y, \quad (20b)$$

où

$$\vec{k} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j} + k_z \hat{k} \quad (21a)$$

et

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \quad (21b)$$

À partir de l'équation (20), on voit que $E(x, y, z)$ s'écrit comme une superposition d'ondes planes se propageant dans des directions quelconques, l'amplitude de chacune d'elles étant donnée par $\tilde{u}(k_x, k_y, z=0)$. Le déphasage entre les différentes ondes planes change avec z parce que la composante

longitudinale du nombre d'onde varie selon l'orientation du vecteur \vec{k} ; on s'attend donc à ce que la forme du champ $u(x, y, z)$ varie selon le plan z considéré [12].

Le milieu dans lequel l'onde se propage étant supposé linéaire, on s'attend à ce que celle-ci conserve son caractère monochromatique au cours de sa propagation; de plus, étant donné que le milieu est homogène, la longueur d'onde se conserve aussi et donc la grandeur du vecteur d'onde k doit aussi se conserver. On aura donc :

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2, \quad (22)$$

de sorte que:

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}. \quad (23)$$

Ceci implique aussi que le domaine d'intégration sur k_x et k_y dans l'équation (18) est limité à:

$$k_x^2 + k_y^2 \leq k^2. \quad (24)$$

L'équation (23) semble contredire l'équation (19). En fait, l'équation (19) ne fait que traduire l'approximation paraxiale faite précédemment. En effet, dans la mesure où le faisceau est faiblement divergent, nous avons donc pour la très grande majorité des ondes planes composant le faisceau, $k_x, k_y \ll k$, ce qui permet l'utilisation de l'approximation binomiale :

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \approx k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}. \quad (25)$$

En insérant (13) dans (18), on trouve :

$$u(x, y, z) = 1/4\pi^2 \iint_{k_x^2 + k_y^2 \leq k^2} \iint_{x', y'} u(x', y', z=0) \exp(ik_x(x-x') + ik_y(y-y')) \exp\left(i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} z\right) dk_x dk_y dx' dy' \quad (26a)$$

Maintenant, dans la mesure où le faisceau est faiblement divergent et que l'approximation paraxiale est vérifiée, l'amplitude des ondes planes $\tilde{u}(k_x, k_y, z)$ associées à des vecteur \vec{k} fortement inclinés par rapport à l'axe z peut être considérée comme négligeable. Nous pouvons alors étendre le domaine d'intégration à tout le plan sans introduire une erreur appréciable, ce qui nous permet de simplifier l'équation (26a) comme suit :

$$u(x, y, z) \approx 1/4\pi^2 \int_{k_x=-\infty}^{\infty} \int_{k_y=-\infty}^{\infty} \iint u(x', y', z=0) \exp(ik_x(x-x') + ik_y(y-y')) \exp\left(-i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} z\right) dk_x dk_y dx' dy'. \quad (26b)$$

Maintenant, considérons l'intégrale :

$$I = \int_{k_x=-\infty}^{\infty} \exp(ik_x(x-x')) \exp\left(-i \frac{k_x^2}{2k} z\right) dk_x. \quad (27)$$

On peut montrer que:

$$I = \sqrt{\frac{2\pi k}{iz}} \exp\left(\frac{ik(x'-x)^2}{2z}\right) \quad (28)$$

En insérant l'équation (28) successivement pour les variables k_x et k_y dans l'équation (26b), on obtient :

$$u(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda z} \iint_{x', y'} u(x', y', z'=0) \exp\left(\frac{ik\left((x-x')^2 + (y-y')^2\right)}{2z}\right) dx' dy'. \quad (29)$$

L'équation (29) s'appelle *la formule de diffraction de Huygens-Fresnel (DHF)*. Cette formule, qui est valable dans l'approximation paraxiale, décrit la propagation d'un faisceau de lumière cohérente dans un milieu homogène, linéaire et isotrope.

1.5 La formule de diffraction scalaire de Huygens-Fresnel à partir de l'intégrale de Rayleigh-Sommerfeld.

Il existe une façon équivalente d'exprimer l'approximation de l'optique paraxiale, qui est peut-être plus intuitive que la précédente, et qui met en jeu les phénomènes de diffraction en partant du principe des ondelettes de Huygens [13]. Si on connaît la distribution de champ électrique dans un plan $z=\text{constante}$, on peut prédire la distribution de champ électrique en aval et en amont du front d'onde en supposant que chaque point du front d'onde puisse être considéré comme une source secondaire qui émet une onde sphérique; le champ résultant en un point $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ donné est la somme complexe des champs issus de chacune des sources ponctuelles situées en \vec{r}' qui composent le front d'onde considéré. Nous ne verrons pas en détails la théorie de la diffraction de Rayleigh-Sommerfeld mais nous allons seulement donner les résultats importants issus de cette théorie en mettant l'accent sur leur sens physique. La contribution élémentaire du champ \vec{E} au point \vec{r}' au champ mesuré au point \vec{r} est donnée, dans la théorie de Rayleigh-Sommerfeld [14], par (Cf. Fig. 1):

$$dE(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{i\lambda} E(\vec{r}') \frac{\exp(ik\rho(\vec{r}, \vec{r}'))}{\rho} \cos\theta(\vec{r}, \vec{r}') d^2\vec{r}'. \quad (30)$$

où $d^2\vec{r}' \equiv dx'dy'$. D'après l'équation (29), la contribution en un point \vec{r} du champ en \vec{r}' est proportionnelle au champ \vec{E} en ce point, à l'élément de surface $d^2\vec{r}'$ et à un terme d'onde sphérique, dont l'amplitude décroît avec l'inverse de la distance $\rho = \|\vec{r} - \vec{r}'\|$. De plus, la théorie prévoit l'existence d'un facteur d'inclinaison $\cos\theta$, de même qu'un terme en i/λ qui prend en compte le fait que le champ en \vec{r} est causé par un *taux de variation* du champ en \vec{r}' , qui fait intervenir une dérivée première du champ en \vec{r}' par rapport au temps [15].

Le champ scalaire résultant en \vec{r} s'obtient alors en sommant toutes les contributions élémentaires sur la surface d'onde S_0 , Cf. Fig. 1:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{s_0} E(\vec{r}') \frac{\exp(ik\rho(\vec{r}, \vec{r}'))}{\rho} \cos\theta(\vec{r} - \vec{r}', \vec{n}) d^2\vec{r}' \quad (31)$$

L'équation (31) s'appelle la formule scalaire de diffraction de Rayleigh-Sommerfeld. L'approximation paraxiale consiste maintenant à supposer que l'inclinaison des ondes par rapport à la normale est faible, ce qui permet d'appliquer les approximations suivantes à l'équation (31) :

$$1) \quad \cos\theta \approx 1; \quad (32a)$$

$$2) \quad \rho = \left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{1/2} \approx z-z' + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2(z-z')} \quad (32b)$$

pour l'argument de l'exponentielle complexe; bref, on ne va pas plus loin que les termes de phase quadratiques dans l'onde sphérique.

$$3) \quad \rho \approx z-z' \text{ pour le terme d'amplitude de l'onde sphérique au dénominateur.} \quad (32c)$$

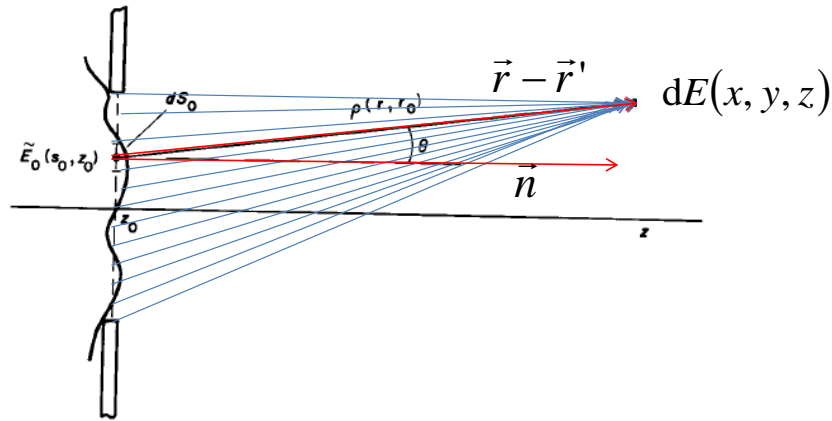


Fig. 1 Principe de superposition des ondelettes de Huygens. Figure tirée de Lasers, Siegman.

Si l'on suppose que la surface d'intégration est située dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation, disons à $z'=0$, alors l'équation (31) devient :

$$E(x, y, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \iint_{s_0} E(\vec{r}') \exp\left(ik \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z} \right) dx'dy', \quad (33)$$

Qui, compte tenu de l'éq. (2), peut aussi s'écrire sous la forme :

$$u(x, y, z) = \frac{1}{iz\lambda} \iint_{S_0} u(x', y', 0) \exp\left(ik \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z}\right) dx' dy', \quad (34)$$

au moyen de l'équation (2). L'équation (34), identique à l'équation (29) est la formule DHF. Cette équation s'appelle la formule de *diffraction de Fresnel*. Dans le cas du champ lointain, nous verrons à la section 1.6 que l'équation (34) se ramène à une transformée de Fourier et on parle de *diffraction de Fraunhofer*.

Il est utile de supposer que $u(x, y, z)$ est séparable, c'est-à-dire : $u(x, y, z) = u_x(x, z)u_y(y, z)$, puisque cela raccourcit les temps de calcul numérique significativement. On peut alors exprimer $u_x(x, z)$ sous la forme suivante :

$$u_x(x, z) = \sqrt{\frac{1}{i\lambda z}} \exp\left(\frac{ikx^2}{2z}\right) \int u_x(x', 0) \exp\left(\frac{ikx'^2}{2z}\right) \exp\left(-\frac{ikx'x}{z}\right) dx', \quad (35a)$$

avec une forme similaire pour :

$$u_y(y, z) = \sqrt{\frac{1}{i\lambda z}} \exp\left(\frac{iky^2}{2z}\right) \int u_y(y', 0) \exp\left(\frac{iky'^2}{2z}\right) \exp\left(-\frac{iky'y}{z}\right) dy'. \quad (35b)$$

1.6 Le nombre de Fresnel et la diffraction en champ lointain, dite "diffraction de Fraunhofer".

La diffraction en champ lointain, dite de Fraunhofer, apparaît lorsqu'on peut négliger le terme de phase quadratique dans l'intégrale de l'équation (34). Soit a l'étendue spatiale (ou la largeur) de la distribution u_{0x} . Alors la condition de Fraunhofer, qui permet de remplacer $\exp\left(-\frac{ikx'^2}{2z}\right)$, par l'unité est :

$$\max\left(\frac{kx'^2}{2z}\right) = \frac{ka^2}{2z} = \frac{\pi a^2}{\lambda z} \ll 1. \quad (36)$$

On définit le nombre de Fresnel, N , comme :

$$N \equiv \frac{a^2}{\lambda z}. \quad (37)$$

Alors, la condition de Fraunhofer s'écrit :

$$N \ll \frac{1}{\pi}. \quad (38)$$

Si la condition (38) est satisfaite, alors, on peut écrire l'équation (35) sous la forme approchée suivante :

$$u_X(x, z) \cong \sqrt{\frac{1}{i\lambda z}} \exp\left(\frac{ikx^2}{2z}\right) \int u_X(x', 0) \exp\left(-\frac{ikx'x}{z}\right) dx'. \quad (39)$$

On constate que le champ lointain s'écrit comme la transformée de Fourier du champ complexe u_{oX}

incident, multipliée par un terme de phase quadratique et un coefficient complexe, $\sqrt{\frac{1}{i\lambda z}}$.

La diffraction en champ lointain permet donc d'effectuer expérimentalement, de façon analogique, une transformée de Fourier. La branche de l'optique exploitant cette idée porte le nom d'*optique de Fourier*. On peut obtenir l'approximation de Fraunhofer en se plaçant suffisamment loin de l'objet diffractant pour que l'équation (35) soit valide, mais il est plus commode de se placer au foyer d'une lentille convergente de focale quelconque, ce qui permet d'éliminer le terme de phase quadratique et de satisfaire l'équation (38) de manière exacte à une distance finie (Cf. problème 10).

1.7 Conclusion

Nous avons d'abord considéré un faisceau monochromatique dont l'étalement dans l'espace est limité, contrairement à une onde plane. Pour ce faire, nous avons utilisé une formulation complexe du champ électromagnétique:

$$\vec{E} = \vec{u}(x, y, z) \exp(ikz), \quad (2)$$

où la distribution spatiale du champ du faisceau est contenue dans $\vec{u}(x, y, z)$. Nous avons établi l'équation d'onde paraxiale à partir des équations de Maxwell. Cette équation différentielle scalaire décrit la propagation de faisceaux monochromatiques faiblement divergents.

$$u_{xx} + u_{yy} + 2iku_z = 0 \quad (12)$$

Ensuite, partant de cette équation, nous avons utilisé une description en termes de spectre d'ondes planes pour arriver à une formulation *équivalente* à l'ÉOP, qui est une équation intégrale qu'on appelle la formule de diffraction de Huygens-Fresnel (DHF).

$$u(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda z} \iint_{x', y'} u(x', y', z' = 0) \exp \frac{ik \left((x - x')^2 + (y - y')^2 \right)}{2z} dx' dy' \quad (29)$$

Cette formule peut aussi être obtenue à partir de la théorie classique de la diffraction de Rayleigh-Sommerfeld.

Nous avons ensuite introduit le nombre de Fresnel, N :
$$N \equiv \frac{a^2}{\lambda z}, \quad (37)$$

puis finalement montré que la formule de DHF est approchée par une transformée de Fourier lorsque N est beaucoup plus petit que l'unité. Ceci correspond au régime de diffraction en champ lointain. La figure de diffraction en champ lointain se conçoit alors comme une transformée de Fourier analogique qui se traite dans le cadre de l'optique de Fourier.

Annexe**Calcul de la figure de diffraction en champ proche d'une onde quasi-plane par un trou circulaire sur son axe à une distance quelconque (voir Prob. 6).**

A.1 Le calcul du champ sur l'axe du trou : approche basée sur le calcul intégral.

Le calcul de la figure de diffraction sera fait avec la formule de diffraction de Huygens-Fresnel (29):

$$u(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda z} \iint_{x', y'} u(x', y', z' = 0) \exp \frac{ik \left((x-x')^2 + (y-y')^2 \right)}{2z} dx' dy'. \quad (29)$$

Considérons la diffraction d'une onde plane de longueur d'onde λ par un trou de rayon a centré sur l'axe z .

On suppose ainsi que le champ $E(\vec{r}_0)$ est uniforme sur le trou, i.e., $E(\vec{r}') = E_0 = \text{constante}$. Nous allons d'abord nous intéresser à la distribution de champ électrique sur l'axe du trou, i.e., le long de l'axe optique z , $x=y=0$. Nous avons alors:

$$u(x=0, y=0, z) = \frac{1}{i\lambda z} \iint_{x'^2+y'^2 < a^2} u(\vec{r}') \exp \left(ik \frac{(x'^2 + y'^2)}{2z} \right) dx' dy', \quad (A1)$$

où l'on suppose que le champ transmis est nul pour $r > a$ et reste intact pour $r \leq a$. On passe ensuite en coordonnées cylindriques. On arrive à une somme de termes complexes de mêmes modules mais de phases différentes :

$$u(r=0, z) = u_0 \frac{1}{i\lambda z} \int_{r'=0}^a \exp \left(ik \frac{r'^2}{2z} \right) 2\pi r' dr'; \quad (A2)$$

$$u(r=0, z) = u_0 \frac{2\pi}{i\lambda z} \left(-\frac{iz}{k} \exp \left(\frac{ikr'^2}{2z} \right) \right) \Big|_0^a; \quad (A3)$$

$$u(r=0, z) = -u_0 \left(\exp\left(\frac{i\pi a^2}{\lambda z}\right) - 1 \right). \quad (\text{A4})$$

Si on s'intéresse à la densité de puissance par unité de surface (en W/m²) de l'onde, proportionnelle au module carré de \vec{E} , on obtient :

$$I(r=0, z) \propto |u(r=0, z)|^2 = u_0^2 \left| \exp\left(\frac{i\pi a^2}{\lambda z}\right) - 1 \right|^2 = u_0^2 |\exp(i\pi N) - 1|^2, \quad (\text{A5})$$

où l'on a utilisé l'éq. (36). Pour les valeurs impaires de N , i.e., $N = 1, 3, 5, \dots$ on aura :

$|u(r=0, z)|^2 = u_0^2 |-1 - 1|^2 = 4u_0^2$. On obtient le résultat (plutôt étonnant!) que l'intensité sur l'axe est

quatre fois plus intense que celle de l'onde incidente sur le trou. Pour les valeurs de N paires, i.e., $N = 2, 4,$

6, etc., on aura : $|u(r=0, z)|^2 = u_0^2 |1 - 1|^2 = 0$: le champ électrique est nul sur l'axe optique pour les valeurs paires de N .

A.2 Calcul du champ sur l'axe du trou : approche graphique

On considère à nouveau l'intégrale (A.2), qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u(r=0, z) = u_0 \frac{1}{i\lambda z} \int_{\substack{\text{Surface du trou} \\ \text{de rayon } a}} \exp\left(ik \frac{r'^2}{2z}\right) dS, \quad (\text{A6})$$

où dS représente un élément de surface infinitésimal, mais cette fois, au lieu d'utiliser des éléments de surface $dS=2\pi r dr$ qui correspondent à des anneaux d'épaisseurs égales, on partitionne la surface du trou en

n anneaux de surfaces égales.¹ On fera ensuite tendre n vers l'infini. Pour le l -ème anneau de rayons interne et externe r_l et r_{l+1} , ΔS sera donné par :

$$\Delta S = \pi r_{l+1}^2 - \pi r_l^2. \quad (\text{A7})$$

La longueur du chemin optique associée au rayon interne du l -ème anneau est donnée par le théorème de Pythagore, i.e.,

$$\delta_l = \sqrt{z^2 + r_l^2} \cong z + \frac{r_l^2}{2z}, \quad (\text{A8})$$

après l'application du développement du binôme puisque $z \gg r_l$. On voit à partir de (A7) et (A8) que la différence de chemin optique entre deux anneaux consécutifs est donnée par :

$$\delta_{l+1} - \delta_l = \frac{r_{l+1}^2 - r_l^2}{2z} = \frac{\Delta S}{2\pi z}, \quad (\text{A9})$$

d'après l'éq. (A7). Le déphasage entre deux anneaux consécutifs est donné par :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_{l+1} - \delta_l) = \frac{\Delta S}{\lambda z} \quad (\text{A10})$$

Ce déphasage est indépendant de j . *Donc, dans l'approximation paraxiale, à des anneaux consécutifs d'aires égales correspondent des déphasages égaux.* Pour n anneaux, la différence de phase entre deux ondelettes provenant respectivement du centre et de l'anneau extérieur situé au bord du trou est donnée par :

$$\phi = \sum_{l=1}^n \Delta\phi = \frac{1}{\lambda z} \sum_{l=1}^n \Delta S = \frac{1}{\lambda z} \pi a^2 = \pi N, \quad (\text{A11})$$

¹ Le premier anneau sera un cercle.

Ce déphasage correspond à celui existant entre le centre et le bord du trou. Alors, l'équation (A6), approchée par une somme discrète, devient :

$$u(r=0, z) = u_0 \frac{-i}{\lambda z} \sum_{l=1}^n \exp(il\Delta\varphi) \Delta S \quad (\text{A12})$$

Intéressons-nous au terme de sommation dans l'équation (A12).

$$\Lambda = \sum_{l=1}^n \exp(il\Delta\varphi) \Delta S, \quad (\text{A13})$$

Nous avons tracé Λ dans le plan complexe à Fig. 2 pour le cas particulier où $N=1$. La longueur totale du trajet dans le plan complexe correspond à un demi-cercle; cette longueur totale est égale à la surface totale du trou:

$$S = \sum_{j=1}^n \Delta S = \pi a^2. \quad (\text{A14})$$

Par ailleurs, le déphasage accumulé entre le centre du trou et le dernier anneau est de π d'après l'équation (A11).

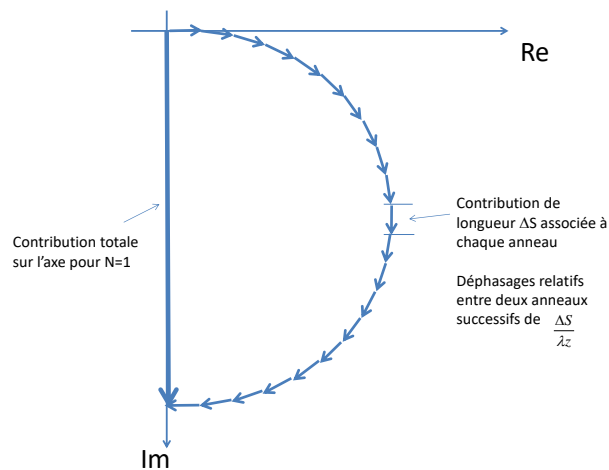


Fig. 2 Illustration de la somme Λ (équation (A.14)) pour le cas particulier $N=1$ où l'on a partitionné le trou en 21 anneaux d'aires égales. La contribution totale correspond à une flèche verticale orientée vers le bas.

La contribution nette pour $N=1$ est donnée par la longueur de la longue flèche verticale à la Fig. 2 qui est plus courte d'un facteur $2/\pi$ que la longueur totale du trajet :

$$\Lambda = S \times \frac{2}{\pi} = 2a^2 \quad (\text{A15})$$

En insérant (A15) dans (A12) puis en prenant le module, on trouve :

$$|u(r=0, z)| = |u_0| \frac{2a^2}{\lambda z} = 2|u_0|N = 2|u_0|. \quad (\text{A17})$$

L'intensité, qui est proportionnelle à $|u|^2$, est donc quatre fois plus grande sur l'axe optique que l'onde incidente juste avant le trou! Ce calcul démontre que la diffraction dans l'espace libre d'un faisceau avec un front d'onde initial plan ne s'accompagne pas forcément d'un élargissement du faisceau et d'une baisse de l'intensité maximale. Nous venons de donner un exemple d'une situation où, en champ proche, l'intensité maximale pouvait être augmentée sans avoir à utiliser d'optique de focalisation. Un raisonnement analogue pour $N=2$ mène à un résultat net nul, tel que montré à la Fig. 3.

À noter que le terme de déphasage global du champ électrique, de la forme : $i \exp(-ikz)$ devant la sommation, n'intervient pas dans le calcul du module du champ électrique net. Le déphasage des contributions au champ sur l'axe au point z associées aux différents anneaux peut prendre n'importe quelle valeur; dans les Fig. 2 et 3, nous avons pris ce déphasage égal à zéro; si on avait utilisé une autre valeur de déphasage, la première flèche aurait eu une orientation différente, mais ceci n'aurait rien changé à la trajectoire circulaire sur un demi-cercle pour $N=1$ et sur un cercle complet pour $N=2$. C'est le déphasage relatif entre les différents anneaux qui dicte l'évolution de l'intensité relative de l'onde en fonction de z ou de N .

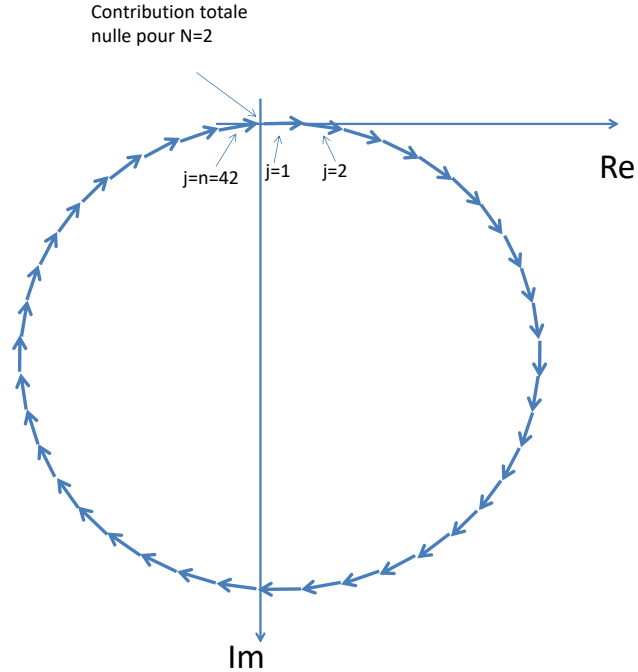


Fig. 3. Illustration de la somme Λ (équation (A.13)) pour le cas particulier $N=2$, où l'on a effectué une partition du trou en 42 anneaux d'égalles aires. La somme complexe s'annule.

A.3 Détermination du champ diffracté $u(r,z)$ à une position (r, z) arbitraire.

Pour déterminer le champ à une position arbitraire, $r > 0$, nous utilisons encore les coordonnées cylindriques parce que le terme de déphasage dans l'intégrale ne dépend que de la distance r_0 de l'axe z . On peut alors transformer l'intégrale (28) en une intégrale qui fait intervenir les fonctions de Bessel d'ordre zéro (Cf. Problème 11 à la fin de ce chapitre):

$$u(r, z) = 2\pi \frac{-i}{z\lambda} \int_0^\infty u(r', 0) \exp\left(ik \frac{(r^2 + r'^2)}{2z}\right) J_0\left(\frac{k}{z} r r'\right) r' dr' \quad (\text{A18})$$

Les profils d'intensité à différentes distances, correspondant à différentes valeurs de nombre de Fresnel N , sont donnés à la Fig. 4 et quelques résultats expérimentaux sont montrés à la Fig. 5.

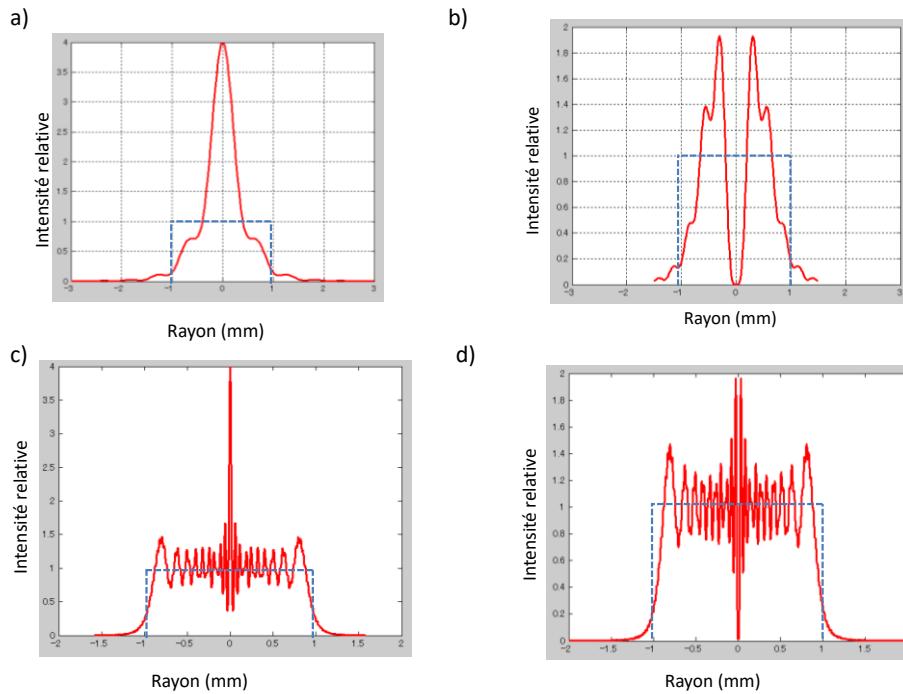


Fig. 4. Distribution d'intensité calculée produite par une onde plane monochromatique diffractée par un trou de rayon unitaire pour quatre distances correspondant à : a) $N=1$, b) $N=2$, c) $N=19$, d) $N=20$. L'intensité a été normalisée par celle de l'onde incidente. On voit que l'intensité sur l'axe peut atteindre jusqu'à quatre fois l'intensité incidente, montrée en lignes tiretées sur les figures, pour des valeurs impaires des nombres de Fresnel, alors qu'elle s'annule pour des valeurs paires de N .

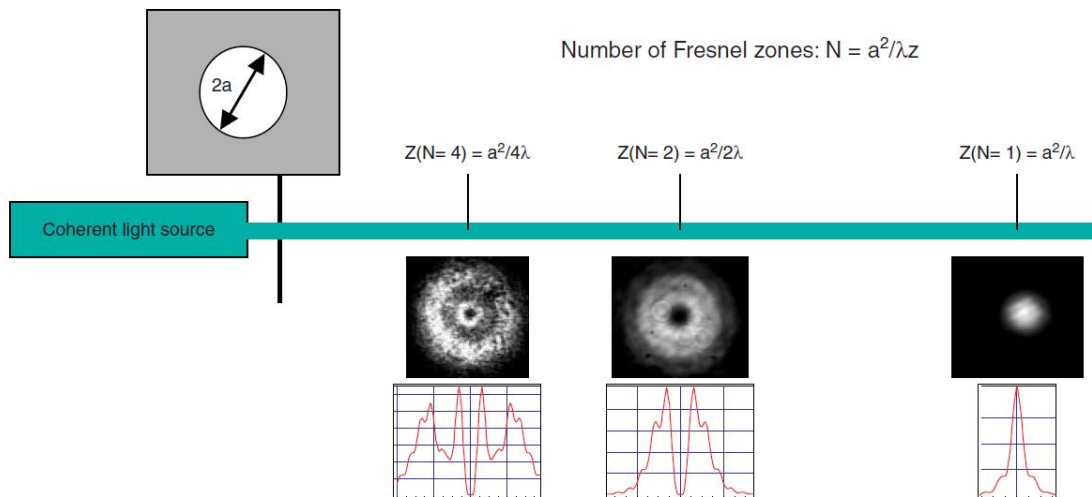


Fig. 5. Profils expérimentaux d'un laser émettant à $\lambda=532$ nm diffracté par un trou à des distances correspondant à $N=1,2$, et 4 . [16]

Exercices et problèmes

1. Vérifier qu'en l'utilisant l'équation (28) dans l'équation (26b), celle-ci se simplifie bien tel que montré à l'équation (29).

2. L'équation (39) exprime le champ $u_x(x, z)$ comme une transformée de Fourier du champ à une autre position $u_x(x, z = 0)$ dans l'approximation de Fraunhofer. Quelle est la variable conjuguée de x dans l'équation 39? Donner une interprétation physique de cette variable conjuguée.

3. Si on fait passer un faisceau gaussien de diamètre $D=5$ mm émettant à $\lambda=632.8$ nm par un trou faisant 1 mm de diamètre :

a) Quelle est la distance minimale à laquelle on doit placer un écran pour obtenir une distribution d'intensité bien représentée par la formule de Fraunhofer?

b) Quelle est la forme mathématique approximative de la distribution d'intensité sur l'écran?

4. En vous aidant d'une recherche personnelle, expliquer le principe de filtrage spatial. Donner son utilité et proposer un montage expérimental permettant d'effectuer ce filtrage spatial.

5. Pour résoudre l'intégrale (18), nous avons limité les bornes d'intégration pour k_x et k_y telles que :

$k_x^2 + k_y^2 \leq k^2$ (23). En fait, on peut lever cette restriction et faire l'intégrale dans tout le plan, i.e., avec les

bornes d'intégration : $-\infty < k_x < \infty$ et $-\infty < k_y < \infty$.

a) Comment interprétez-vous physiquement les ondes pour lesquelles : $k_x^2 + k_y^2 > k^2$?

b) En vous aidant d'une recherche bibliographique ou en ligne, donner un exemple d'application en microscopie où les ondes avec $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ sont exploitées et apportent un avantage concret et énoncer cet avantage en expliquant le montage.

6. Diffraction de Fresnel par une ouverture circulaire. On éclaire une ouverture circulaire de rayon a avec une onde plane monochromatique en incidence normale à la longueur d'onde λ .

Note : Pour les questions a, b, c, normaliser l'intensité par celle de l'onde plane incidente.

- a) Donner l'expression analytique de l'intensité sur l'axe du trou circulaire en fonction de la distance z au trou.
- b) Tracer la courbe de l'intensité $I(r=0,z)$ sur l'axe z en fonction de la coordonnée z . Sur votre graphique, et normaliser z par a^2/λ .
- c) Tracer le profil radial de l'intensité champ $I(r)$ pour les nombres de Fresnel $N=1, N=2$.
- d) Donner la forme analytique de $u(r,z)$ dans l'approximation du champ lointain (N tendant vers zéro).

7. Montrer que l'approximation de Fresnel de l'intégrale de diffraction de Rayleigh-Sommerfeld est valide à condition que $\max((x-x')^4) \ll L^3\lambda$.

8. Estimer la divergence maximale d'un faisceau (en radians) pour que l'approximation de l'optique paraxiale soit valide.

9. Montrer que l'équation (34) est une solution de l'ÉOP (12). Ceci démontre que les approximations utilisées (éq. 32a, b, c) sont équivalentes à celle menant à l'élimination du terme de dérivée seconde en u_{zz} dans l'équation de Helmholtz.

10. Les distances requises pour que la formule de diffraction en champ lointain de Fraunhofer soit valide sont souvent très grandes, ce qui suggère que son utilité est limitée à des cas très spéciaux. En fait, il n'en est rien. Considérer un objet d'optique diffractive dont la transmission complexe à la longueur d'onde λ est, en une dimension, $T(x)$. On place cet écran juste en amont d'une lentille mince de focale f et on l'éclaire avec une onde plane de longueur d'onde λ .

- a. Calculer la distribution de champ u au foyer image de la lentille et montrer que la formule de Fraunhofer est strictement valide lorsqu'on s'intéresse à la distribution transverse du champ complexe au foyer image d'une lentille mince. Indice : nous verrons au chapitre 2 que le profil de phase créé par une

lentille convergente revient à multiplier le champ u par un terme de phase quadratique donné par:
 $\times \exp(-i\pi r^2/f\lambda)$. Vous pouvez utiliser la formule de Huygens-Fresnel en une dimension.

b. À la question précédente, le champ u au foyer image de la lentille présente un terme de phase quadratique en fonction de la position x qui multiplie la transformée de Fourier de $T_\lambda(x)$. Montrer que, si l'on place plutôt l'écran au foyer objet de la lentille, la formule de Fraunhofer est encore valide au foyer image de celle-ci, mais le terme de phase quadratique a disparu. Indice : la propagation dans l'espace libre sur une distance $L = z - z_0$ revient à appliquer l'opérateur intégral suivant:

$$u(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda L} \iint_{S_0} u(x', y', z_0) \exp\left(ik \frac{((x-x')^2 + (y-y')^2)}{2L}\right) dx' dy'.$$

11. Intégrale de Huygens-Fresnel en coordonnées cylindriques. Dans un calcul en 2D utilisant les coordonnées polaires, on peut écrire une distribution arbitraire de champ sous la forme

$$u(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} R_m(r) \exp(im\theta), \text{ où } m \text{ est un entier positif ou négatif. Montrer que l'intégrale de Huygens-Fresnel en coordonnées cartésiennes :}$$

Fresnel en coordonnées cartésiennes :

$$u(x, y, z) = \frac{1}{iz\lambda} \iint u(x_0, y_0, 0) \exp\left(ik \frac{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)}{2z}\right) dx_0 dy_0,$$

peut s'écrire en coordonnées polaires sous la forme:

$$R_m(r, z) = 2\pi \frac{1}{i^{m+1} z \lambda} \int_0^\infty R_m(r_0, 0) \exp\left(ik \frac{(r^2 + r_0^2)}{2z}\right) J_m\left(\frac{k}{z} r r_0\right) r_0 dr_0$$

Indice : une représentation intégrale des fonctions de Bessel de première espèce sera utile.

12. Diffraction de Fraunhofer d'une onde plane monochromatique par une fente infinie de largeur a .

- a) Donner la condition de distance z du plan d'observation pour respecter l'approximation de la diffraction de Fraunhofer en fonction de λ et a .

- b) Utiliser l'approche graphique vue à l'annexe A2 afin de déterminer les positions angulaires θ des maxima et des minima d'intensité de diffraction et donner les valeurs de nombre de Fresnel N correspondantes.
- c) En utilisant toujours l'approche graphique, déduire la forme mathématique de l'amplitude du champ en fonction de l'angle d'observation $E(\theta)$.

13. Établissement de la formule de Huygens-Fresnel :

- a. Montrer qu'un champ scalaire écrit sous la forme d'un spectre d'ondes planes tel que :

$$E(x, y, z) = 1/2\pi \iint_{k_x, k_y} \tilde{u}(k_x, k_y, z=0) \exp(ik_x x + ik_y y + ik_z z) dk_x dk_y$$
 est une solution de l'équation de

Helmholtz.

- b. En faisant l'approximation suivante: $k_z \approx k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}$, montrer que la solution en spectre d'ondes

planes donnée à la sous-question précédente mène à la formule de Huygens-Fresnel.

- c. Quelle est la signification physique de l'approximation $k_z \approx k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}$?

14. Diffraction par un obstacle circulaire : le point d'Arago.

Références et commentaires:

¹ Voir le livre *Laser et optique non linéaire* de Ch. Delsart, p. 17 à 21 pour une définition plus formelle de la cohérence.

² On peut aussi consulter le livre *Optique quantique : une introduction* de M. Fox, Éd. De Boeck, section 2.3 pour une discussion plus poussée sur la cohérence temporelle.

³ E. Wolf, *J. Opt. Soc. Am.*, **72(3)**, 343, 1982 et M. J. Bastiaans, *J. Opt. Soc. Am. A*, **3(8)**, 1227, 1986 utilisent la fonction de cohérence mutuelle, $\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2) \equiv \langle E^*(\vec{r}_1, t_1)E(\vec{r}_2, t_2) \rangle$, qui décrit à la fois les cohérences spatiale et temporelle.

⁴ Ceci n'est valable que pour un matériau isotrope; pour un matériau biréfringent, les vecteurs d'onde et de Poynting n'ont pas nécessairement la même orientation.

⁵ On pourrait écrire: $\vec{E}_0 = \Re\{\vec{u} \exp i(\omega t - kz)\}$, mais cela changerait le signe de la partie imaginaire de l'indice de réfraction ou de la susceptibilité. On utilise donc pour ce cours une seule convention pour l'écriture du champ complexe, qui est celle exprimée par l'éq. (1).

⁶ Notez que $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ où $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ et $\mu = \mu_0 \mu_r$, sont respectivement la permittivité et la perméabilité magnétique du milieu.

⁷ Cette hypothèse est vérifiée automatiquement dans le vide et l'est approximativement dans un matériau si le champ électrique n'est pas trop élevé;

⁸ On peut trouver une équation analogue pour le champ magnétique : $\nabla^2 \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$.

⁹ Notons que des couplages peuvent apparaître entre les composantes des champs \vec{E} et \vec{B} si le milieu est inhomogène, i.e., $\epsilon(\vec{r})$ ou si des conditions aux limites existent qui couplent des composantes entre elles, ou même si le faisceau a une grande ouverture numérique. Ici, le découplage entre les différentes composantes est justifié car nous nous limitons à une onde quasi-plane se propageant dans un milieu homogène, isotrope et linéaire, Cf. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, 2ème Éd., McGraw-Hill, 1996, section 3.2 pour plus de détails.

¹⁰ Voir la section 16.1 dans *Lasers*, de A. E. Siegman.

¹¹ Les faisceaux d'Hermite-Gauss ou de Laguerre-Gauss sont obtenus en écrivant l'équation (12) avec les variables cartésiennes ou cylindriques respectivement et en supposant la séparabilité des variables.

¹² Il existe une certaine classe de faisceaux, qu'on appelle *faisceaux non-diffractants*, qui, comme leur nom l'indique, ont une distribution transverse d'intensité invariante avec z. Elles correspondent à un faisceau d'ondes planes dont les vecteurs \vec{k} sont distribués sur un cône d'angle donné. Voir J. Durnin et al., *Diffraction-free beams*, *Phys. Rev. Lett.* **58(15)**, 1499, 1987.

¹³ Chaque élément d'un front d'onde peut être conçu comme étant à l'origine d'ondelettes secondaires sphériques; la position du front d'onde à un temps ultérieur est l'enveloppe des différentes ondelettes. C. Huygens, *Traité de la lumière*, Leyden, 1690.

¹⁴ J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, 2ème Éd., McGraw-Hill, 1996, section 3.5.2.

¹⁵ Ce terme, qui apparaît implicitement dans le développement en ondes planes montré ci-haut, est à l'origine du déphasage de Gouy, que nous verrons au chapitre 3.

¹⁶ Figure tirée de J.F. Bisson et al., *Laser Phys. Lett.*, **2(7)**, 327, 2005.