Les grands problèmes de l’Antiquité

Paul Deguire
Département de mathématiques et statistique
Université de Moncton, Canada

Les constructions géométriques : règles du jeu

Les postulats géométriques des Éléments d’Euclide ont fixé, pour les grecs anciens, quelles étaient les règles permises pour effectuer des constructions géométriques. Une construction effectuée à la règle et au compas respecte les règles du jeu. Une construction qui est basée sur d’autres outils que la règle et le compas ne respecte pas les règles du jeu.

Les grecs savaient faire certaines constructions sans respecter les règles du jeu, par exemple avec des constructions mécaniques ou à l’aide d’intersection de coniques. Dans ce cas, ils étaient conscients que ces problèmes de constructions n’étaient qu’imparfaitement résolus, autrement dit que ces problèmes étaient toujours ouverts.

Les trois grands problèmes de l’antiquité

Il existe trois grands problèmes de construction qui ont intéressé les grecs et déjoué tous leurs efforts. Trois problèmes qui n’ont été résolus qu’au 19e siècle.

1. La duplication du cube : construire un cube dont le volume est le double du volume d’un cube donné.
2. La trisection de l’angle : construire un angle dont la mesure est le tiers de celle d’un angle donné.
3. La quadrature du cercle : construire un carré dont l’aire est égale à celle d’un cercle donné.

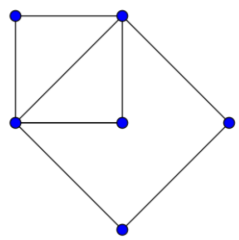
Ce qui est intéressant et qui encourageait les grecs à persévérer dans leur espoir de réaliser ces constructions à la règle et au compas est qu’ils savaient faire des constructions similaires un peu plus simples.

La duplication du cube

Un problème analogue à la duplication du cube : la duplication du carré.

Construire un carré dont l'aire est le double de celle d'un carré donné.

La construction est très simple et en fait toute la géométrie pour la réaliser se retrouve dans les premières propositions du premier livre des Éléments d'Euclide. Il suffit de savoir construire un carré dont le côté est la diagonale du carré donné. Comme sur la figure ci-dessous :



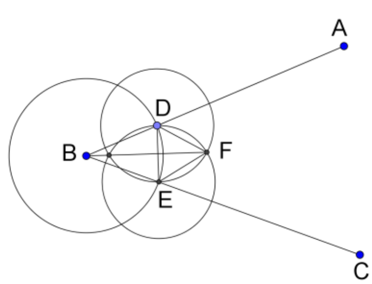
Si le carré donné a un côté de mesure c, son aire sera de mesure c^2. Le nouveau carré aura un côté de mesure $\sqrt{2}\,c$ et son aire sera de mesure $2c^2$. On a bien réalisé la duplication du carré.

La trisection de l'angle

Un problème analogue à la trisection de l'angle : la bissection de l'angle.

Construire un angle dont la mesure est la moitié de celle d'un angle donné.

Cette construction est simple, c'est la neuvième proposition du premier livre des Éléments d'Euclide. Nous reproduisons la construction entière ci-dessous :



On veut bissecter l'angle ABC. On se donne un point D sur le côté BA et on trace le cercle de rayon BD et de centre B. Ce cercle coupe le côté BC au point E, On trace DE. Ensuite on trace deux cercles, un centré en D, l'autre en E, tous deux de rayon DE. Ces deux cercles se coupent en deux points, on choisit F, celui des deux qui est le plus éloigné du sommet de l'angle ABC. On observe facilement que le triangle DEF est équilatéral. On trace BF.

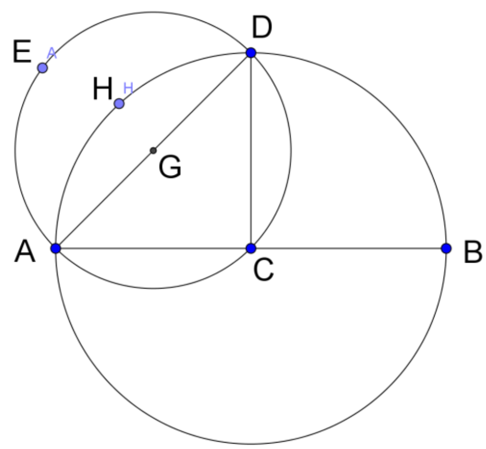
BF est la bissectrice de l'angle ABC. En effet les triangles BDF et BCF sont congrus par CCC. Les angles correspondants dans les deux triangles sont donc congrus, en particulier les angles ABF et CBF sont congrus, BF bissecte bien l'angle ABC.

La quadrature du cercle.

Faire la quadrature d'une figure donnée est construire un carré dont l'aire est égale à celle de la figure donnée. Les grecs savaient faire la quadrature des figures polynomiales. La première figure non polynomiale dont les grecs ont pu faire la quadrature est une lunule particulière. Une lunule est une figure plane obtenue à partir de deux cercles non concentriques.

Quadrature de la lunule AED

Cette lunule est la partie du disque AEDC de centre G non contenue dans le disque ADB de centre C.



On considère le cercle ADB centré en C dont AB est un diamètre et le cercle AED centré en G dont AD est un diamètre. DC est perpendiculaire à AB. Le diamètre du cercle ADB est égal à $\sqrt{2}$ fois le diamètre du cercle AED, donc l'aire du cercle ADB est égale à deux fois l'aire du cercle AED. Cela revient à dire qu'un quart du disque ADB a la même aire que la moitié du disque AED. Donc, le quart de disque AHDC et le demi-disque AED ont la même aire. En retranchant AHDG, la partie commune aux deux figures, on obtient que l'aire de la lunule AED est égale à l'aire du triangle ADC. Puisque la quadrature du triangle est connue, on a également la quadrature de la lunule.

Cette construction, réalisée par Hippocrate de Chios, au 5e siècle avant Jésus Christ, est la première quadrature d'une figure entièrement délimité par des lignes courbes. Hippocrate s'intéressait à la quadrature du cercle et croyait que la quadrature des lunules allait l'amener à la quadrature du cercle. Hippocrate s'est aussi intéressé au problème de la duplication du cube.

La fin de l'histoire

La solution aux grands problèmes de l'antiquité n'a été trouvée qu'au 19e siècle avec des techniques qui mélangent l'algèbre et la géométrie. Les résultats principaux sont dus aux mathématiciens Pierre Wantzel et Ferdinand Lindemann. Wantzel a montré une condition nécessaire pour qu'un nombre soit constructible en 1837, ce qui a montré immédiatement que la duplication du cube et la trisection de l'angle, à la règle et au compas, étaient impossibles. Mais puisqu'on ne savait toujours pas si le nombre $\sqrt{\pi}$ était constructible à ce moment, il a fallu attendre en 1882 que Lindemann démontre la transcendance de π pour conclure que la quadrature du cercle était aussi impossible à réaliser à la règle et au compas.

Une solution qui ne respecte pas les règles du jeu

Les grecs avaient une bonne connaissance des coniques (cercles, ellipses, paraboles, hyperboles). Sauf le cercle, ces courbes ne se tracent pas à la règle et au compas. Si on considère, en langage moderne, l'hyperbole d'équation $y = \frac{2}{x}$ et la parabole d'équation $y = x^2$, elles ont un point d'intersection d'abscisse x satisfaisant à l'équation $\frac{2}{x} = x^2 \Leftrightarrow x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$. La construction du nombre $x = \sqrt[3]{2}$ étant précisément ce dont a besoin pour réaliser la duplication du cube (le côté du nouveau cube étant égal à $\sqrt[3]{2}$ fois le côté du cube donné), le problème est résolu avec l'intersection des coniques.